# ANNALES

DE LA

# SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

DE BRUXELLES

ASSOCIATION SANS BUT LUCRATIF

TOME SOIXANTE-HUITIÈME, 1954

SÉRIE I

## SCIENCES MATHÉMATIQUES, ASTRONOMIQUES ET PHYSIQUES

TROISIÈME ET DERNIER FASCICULE

31 DÉCEMBRE 1954

*Publié avec le concours de la Fondation universitaire de Belgique et du Gouvernement*

LOUVAIN

**Secrétariat de la Société Scientifique**

11, RUE DES RÉCOLLETS, 11

**Chèques postaux 2027.46**

1954

**Publication trimestrielle. Prix de ce fascicule séparé: 60 frs**

AVIS

Les périodiques internationaux de références et de bibliographie sont autorisés à reproduire, moyennant due référence, les résumés que les auteurs placent en tête de leurs travaux dans ces *Annales*.

# TABLE DE MATIÈRES

Session du 18 novembre, à Louvain


PAGES

PREMIÈRE SECTION : **Sciences mathématiques et astronomiques**

Les algèbres de Lie de caractéristique quelconque, par R. LAVENDHOMME 133

Factorisation des polynomes cyclotomiques modulo un nombre premier, par Robert BALLIEU ..... 140

A generalisation of Bessel-Maitland function by A. M. CHAK ..... 145

Théorie limite du flambage d'une plaque circulaire chauffée en son centre. Déformées caractéristiques, par F. BUCKENS ..... 157

DEUXIÈME SECTION : **Sciences physiques et chimiques**

Au sujet de certaines images consécutives, par A. Biot ..... 164

Tables pour le calcul des doublets minces collés, corrigés de l'aberration sphérique, par A. BIOT ..... 167

Etude théorique et expérimentale de la figure de diffraction de l'héliomètre, par N. SÉGARD et A. VANDENBOSSCHE ..... 175

Quartz piézoélectrique à utiliser pour l'obtention de l'effet Doppler, par N. SÉGARD et E. BESÈME ..... 185

Note concernant le spectre infra-rouge à grande dispersion de la molécule $CH_3 — CH_2D$, par R. VAN RIET, C. COURTOY et M. DE HEMPTINNE 193

Table des Matières du Volume 68e ..... 207



Le prix d'ABONNEMENT aux ANNALES, série I, pour des personnes ne faisant pas partie de la Société scientifique, est fixé comme suit :

*en Belgique, au Congo-Belge et au Luxembourg* 100 fr.
*dans les autres pays* 150 fr.

SESSION DU 18 NOVEMBRE 1954
A LOUVAIN

Première Section

Sciences Mathématiques et Astronomiques

# Les algèbres de Lie de caractéristique quelconque

PAR

R. LAVENDHOMME
Aspirant au F. N. R. S.

Nous nous proposons ici de reprendre deux points de la théorie de la structure des algèbres de Lie en n'imposant pas à la caractéristique du champ de base d'être nulle. Après avoir rappelé, dans le paragraphe d'introduction quelques définitions utiles, nous donnerons dans le deuxième paragraphe une démonstration d'un théorème de Lie valable quelle que soit la caractéristique du champ de base. Le troisième paragraphe étudiera, sans utiliser les critères de Cartan, la décomposition des algèbres de Lie semi-simples en somme directe d'algèbres simples.

## § I. Introduction

Etant donné un champ K, un ensemble R est dit avoir une structure d'algèbre de Lie sur K si,

1°) Il a une structure d'espace vectoriel de dimension finie sur K.

2°) Une loi de composition (commutation) est partout définie dans R. Elle est bilinéaire, vérifie l'identité de Jacobi

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$$

et, pour tout $x$ de R, on a $[x, x] = 0$.

On sait que la substitution de cette dernière condition à l'antisymétrie permet d'éviter certaines difficultés lorsque le champ de base est de caractéristique 2.

On ne perd rien à supposer, comme nous le faisons, que K est un champ (corps commutatif) puisqu'aussi bien on a

$$\lambda\mu\ [x, y] = [\lambda x, \mu y] = \mu\lambda\ [x, y] \quad (\lambda.\ \mu \in K)$$

et si K était un corps non commutatif la seule algèbre qui puisse être définie sur K serait donnée par $[x, y] = 0$ pour tout $x, y$ de R.

Un idéal d'une algèbre de Lie R est un sous-espace vectoriel S de R tel que $[R, S] \subseteq S$.

On définit l'idéal $n$-ième dérivé de R par la récurrence

$$R^{(o)} = R$$
$$R^{(n)} = [R^{(n-1)},\ R^{(n-1)}].$$

Une algèbre de Lie est soluble si l'un de ses dérivés est nul.

Une algèbre de Lie est dite simple si elle n'a que les idéaux triviaux (0) et R.

Une algèbre de Lie est dite semi-simple si elle n'a pas d'idéal soluble autre que (0).

Une algèbre de Lie est dite linéaire si elle est formée d'endomorphismes d'un espace P à $m$ dimensions, la commutation étant définie par $[A, B] = AB - BA$.

Si à tout élément $x$ d'une algèbre de Lie R, on associe un endomorphisme de l'espace R par

$$A_x\ (y) = [x, y] \text{ pour tout } y \text{ de R},$$

l'ensemble des $A_x$ $(x \in R)$ forme une algèbre de Lie linéaire qui est appelée l'adjointe de R.

On appelle équation caractéristique ou équation de Killing d'un élément $x$ d'une algèbre de Lie R, l'équation caractéristique de l'endomorphisme $A_x$ correspondant à $x$ dans la représentation adjointe.

## § 2. Un théorème de Lie

*Lemme*

Soit R une algèbre de Lie sur K, linéaire sur un espace vectoriel P. Soit N un idéal de R. Soit $\varphi$ (A) une fonction linéaire à valeurs dans K, définie sur R. Soit Q l'ensemble de tous les vecteurs $\xi \in P$ satisfaisant à la condition

$$A\xi = \varphi\ (A)\ \xi \qquad (A \in N). \tag{1}$$

Alors Q réduit R.

*Démonstration*

A) Supposons d'abord K algébriquement fermé, toutes les transformations X de R ont alors toutes leurs racines propres dans K. Soit A un élément de N, X un élément de R et $\xi$ un élément de Q.

On voit immédiatement que Q est sous-espace vectoriel de P. Choisissons dans P une base $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r, \xi_{r+1}, \ldots, \xi_n$ telle que

1°) les $r$ premiers vecteurs forment une base de Q permettant d'avoir dans la matrice $(a_{ij})$ de A :

$$a_{ii} = \varphi(A) \qquad \text{pour } i \leqslant r$$
$$a_{ij} = 0 \qquad \text{pour } i \neq j,\ j \leqslant r$$

2°) les $n$-$r$ vecteurs restants sont choisis en sorte que dans $(a_{ij})$

$$a_{ij} = 0 \qquad \text{pour } i \leqslant r,\ j > r.$$

Soit alors $(x_{ij})$ la matrice d'un X quelconque de R par rapport à cette base.

On vérifie aisément que la matrice de $[A, X] = AX - XA$ est $(u_{ij})$ avec :

$$u_{ij} = 0 \qquad \text{pour } i \leqslant r,\ j \leqslant r$$
$$u_{ij} = -\varphi(A)\, x_{ij} + \sum_{k=r+1}^{n} a_{ik}\, x_{kj} \qquad \text{pour } i > r,\ j \leqslant r$$

Puisque N est un idéal $[A, X] \in N$ et donc, par l'hypothèse (1), pour tout $\xi$ de Q on a

$$[A, X]\, \xi = \varphi([A, X])\, \xi.$$

On peut donc trouver une nouvelle base $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_r$ dans Q telle que la matrice de [A, X] par rapport à la base

$$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_r, \xi_{r+1}, \ldots, \xi_n$$

ait la forme $(w_{ij})$ avec

$$(2) \qquad w_{ii} = \varphi[A, X] \qquad \text{pour } i \leqslant r$$
$$w_{ij} = 0 \qquad \text{pour } i \neq j \text{ et } j \leqslant r.$$

Soit $(b_{ij})$ la matrice, provisoirement indéterminée, du changement de base des $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r, \xi_{r+1}, \ldots, \xi_n$ en les $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_r, \xi_{r+1}, \ldots, \xi_n$

et soit $(c_{ij})$ la matrice inverse de $(b_{ij})$.

On a évidemment

$$b_{ii} = 1 \qquad \text{pour } i > r$$

$$b_{ij} = 0 \qquad \text{pour } i \neq j \text{ et } i \text{ ou } j > r$$

et des relations analogues pour les $c_{ij}$.

La transformée de $(u_{ij})$ est

$$(v_{ij}) = (b_{ij})\ (u_{ij})\ (c_{ij})$$

Cherchons le terme $v_{\alpha\beta}$ de cette matrice pour $\alpha$ et $\beta \leqslant r$. La $\beta$-ième colonne de $(d_{ij}) = (u_{ij})\ (c_{ij})$ a pour $s$-ième terme

$$d_{s\beta} = \sum_{i=1}^{n} u_{si}\ c_{i\beta}$$

or $\beta$ est $\leqslant r$, donc pour $i > r$ : $c_{i\beta} = 0$

$$\text{donc } d_{s\beta} = \sum_{i=1}^{r} u_{si} c_{i\beta}$$

or pour $s \leqslant r$, $i \leqslant r$ : $u_{si} = 0$

donc $d_{s\beta} = 0$ pour $s \leqslant r$

le terme $v_{\alpha\beta}$ de $(b_{ij})\ (d_{s\beta})$ est alors

$$v_{\alpha\beta} = \sum_{s=1}^{n} b_{\alpha s}\ d_{s\beta}$$

or pour $s \leqslant r$, on vient de voir que $d_{s\beta} = 0$

et pour $s > r$ : $b_{\alpha s} = 0$ puisque $\alpha$ est $\leqslant r$

d'où $v_{\alpha\beta} = \sum_{s=1}^{r} b_{\alpha s} d_{s\beta} = 0$ (3) pour $\alpha$ et $\beta \leqslant r$

rapprochant (2) de (3) on a

$$v_{\alpha\alpha} = w_{\alpha\alpha} = \varphi\ ([A, X]) = 0$$

or [A, X] étant dans N on a

$$AX\ \xi = \varphi\ ([A, X])\xi + \varphi(A)X\ \xi$$

En y faisant $\varphi[(A, X]) = 0$ on a bien que

$$AX\ \xi = \varphi(A)X\ \xi$$

ce qui exprime bien que $X\xi$ est dans Q pour tout X, c'est-à-dire que Q réduit R.

B) Si K n'est pas algébriquement fermé, il suffit de passer à la clôture algébrique $\overline{K}$ de K

et de poser $\overline{P} = \{\overline{\alpha}\overline{\xi}\}$; $\overline{R} = \{\overline{\alpha}X\}$; $\overline{Q} = \{\overline{\alpha}\overline{\xi}_1\}$; $\overline{N} = \{\overline{\alpha}A\}$

avec $\overline{\alpha} \in \overline{K}$; $\xi \in P$; $X \in R$; $\xi_1 \in Q$; $A \in N$

N est encore idéal de $\overline{R}$

l'hypothèse (1) entraîne en vertu de la linéarité

$$(\overline{\alpha}A)\ (\overline{\beta}\overline{\xi}) = \varphi\ (\overline{\alpha}A)\ \overline{\beta}\overline{\xi}$$

ce qui est, pour $\overline{Q}$, l'hypothèse de A) et $\overline{Q}$ réduit donc $\overline{R}$

On a donc $\overline{A}\ \overline{X}\ \overline{\xi}_1 = \varphi\ (\overline{A})\ \overline{X}\ \overline{\xi}$,

d'où $\overline{\alpha}\ A\ \overline{\beta}\ X\ \xi_1 = \varphi\ (\overline{\alpha}A)\ \overline{\beta}\ X\ \xi$,

d'où $A\ X\ \xi_1 = \varphi\ (A)\ X\ \xi_1$

d'où Q réduit R.

*Théorème de Lie.* Si R est une algèbre de Lie linéaire soluble agissant sur l'aspece P à $m$ dimensions ($m > 0$), il existe un vecteur $\xi_0$ de P qui soit vecteur propre de toutes les transformations de R pourvu que K soit algébriquement fermé.

*Démonstration.* La démonstration se fait par récurrence sur la dimension $n$ de R, car le théorème est trivial pour une algèbre de dimension 0.

Choisissons dans P un sous-espace N à $n$-1 dimensions tel que $[R, R] \subseteq N$.

Ceci est toujours possible, car, R étant soluble, $[R, R] \neq R$.

Soit $C \in N$. On a $R = N + (C)$

De plus $[N, R] \subseteq [R, R] \subseteq N$, donc N est un idéal de R.

La récurrence joue pour N, il existe donc un vecteur propre $\xi \neq 0$ dans P tel que $A\ \xi = \varphi(A)\ \xi \qquad (A \in N)$.

Le sous-espace Q de P, formé de tous les vecteurs $\xi$ satisfaisant à cette relation, en vertu du lemme, réduit R.

En particulier Q est invariant par rapport à C.

C a donc dans Q un vecteur propre, soit $\xi_0$, car K est algébriquement fermé. Ce vecteur $\xi_0$ est vecteur propre de C, par hypothèse. Il est en outre vecteur propre de tout A de N puisqu'il appartient à Q. $\xi_0$ est donc le vecteur propre cherché.

*Remarque.* Il n'est pas nécessaire de supposer K algébriquement fermé mais seulement que K est assez étendu pour que tout A de R y ait toutes ses valeurs propres.

## § 3. Décomposition d'une algèbre de Lie semi-simple

Dans le cas des algèbres de Lie sur un champ de caractéristique nulle, on peut, grâce aux critères de Cartan, démontrer qu'une algèbre de Lie semi-simple est décomposable en une somme directe de sous-algèbres simples et que cette décomposition est unique. Dans le cas d'une algèbre de Lie sur un champ de caractéristique quelconque on sait que les critères de Cartan sont en défaut. On peut cependant dans ce cas général obtenir le même théorème de décomposition.

*Lemme.* A tout idéal N d'une algèbre de Lie semi-simple R on peut faire correspondre un idéal N′ tel que R soit somme directe de N et N′.

*Démonstration.* Soit N un idéal de R.

Soit N′ l'ensemble des éléments $x$ de R tels que $[x, N] = 0$.

1°) N′ est idéal, en effet, soit $x$ dans N′, $y$ dans R et $z$ dans N

$$[[x, y], z] = [x, [y, z]] + [y, [z, x]]$$

or $[y, z]$ est dans N, car N est un idéal donc, $[x,[y, z]] = 0$ et de même $[z, x] = 0$ par définition de N′. Donc on a bien $[[x, y], z] = 0$ pour tout $z$ de N, tout $y$ de R, et tout $x$ de N′. N′ est donc bien un idéal.

2°) L'intersection de N et N′ se réduit à l'élément 0, puisque cette intersection est un idéal commutatif de R et que R est semi-simple.

3°) Montrons maintenant que R est somme directe $N + N'$. Pour cela, soit $x$ quelconque dans R. Montrons qu'il peut être représenté sous la forme $x = x_1 + x_2$, où $x_1$ est dans N et $x_2$ dans N′. Soit S la sous-algèbre de Lie de R engendrée par N et $x$

$$S = ((N, x))$$

a) Cette algèbre n'est pas semi-simple, car $[S, S] \subseteq N \neq S$ puisque

$$[S, N] \subseteq N \text{ et } [x, x] = 0 \in N$$

S a donc un idéal commutatif non nul. Soit V.

On a $N \cap V = \{0\}$

car $N \cap V$ est idéal commutatif dans N donc dans R, et R est semi-simple.

b) $[N, V] = 0$, en effet $[N, V] \subseteq N \cap V$ car N et V sont idéaux.

Il existe donc dans S un élément non nul orthogonal à N, appartenant donc à N′; soit $y$ un tel élément.

$y$ étant dans S, on a $y = x' + \lambda x$, où $x'$ est dans N et $\lambda \neq 0$ (sinon $y$ serait dans N et donc $N \cap N'$ serait différent de 0.)

On a donc $x = 1/\lambda\ y - 1/\lambda\ x'$, ce qui avec $x_1 = -1/\lambda\ x'$ et $x_2 = 1/\lambda\ y$, est la décomposition annoncée.

*Théorème.* Une algèbre de Lie semi-simple peut être décomposée en une somme directe de sous-algèbres simples. Cette décomposition est unique.

*Démonstration*

1°) Soit R une algèbre de Lie semi-simple, soit N un idéal non trivial de R. En vertu du lemme on a $R = N + N'$, où N' est l'annulateur de N. Chacun des idéaux N et N' est encore une algèbre semi-simple. On peut donc encore leur appliquer le lemme. La suite des dimensions des idéaux ainsi emboîtés étant strictement décroissante, au bout d'un nombre fini d'opérations on aura la décomposition annoncée.

2°) Démontrons maintenant l'unicité de cette décomposition. Pour cela on va montrer que les idéaux $N_1, N_2, \ldots, N_k$ obtenus sont tous les idéaux non nuls simples de R.

Soit N* un idéal simple non nul de R. Soit $N_i^*$ la projection de N* dans $N_i$. On a $x = \sum_{i=1}^{k} x_i$ avec $x \in N^*$ et $x_i \in N_i^*$.

Pour tout $y$ de R on a donc

$$[y, x] = \sum_{i=1}^{k} [y, x_i] \quad \text{où} \quad [y, x] \in N \text{ et } [y, x_i] \in N_i,$$

car ce sont des idéaux.

Puisque $[N_i^*, R] \subseteq N_i^*$, $N_i^*$ est idéal de $N_i$, or $N_i$ est simple, donc on a, soit $N_i^* = N_i$ soit $N_i^* = 0$. Soit, par exemple, $N_1 \neq 0$. On voit alors immédiatement que $N_1 \subseteq N^*$, et à cause de la simplicité de N* on a $N_1 = N^*$. C.Q.F.D.

*Réciproque.* Si une algèbre de Lie R est somme directe de sous-algèbres simples de dimension strictement supérieure à 1, elle est semi-simple.

BIBLIOGRAPHIE

CHEVALLEY Cl., « Theory of Lie groups ». Tome I : Princeton University Press (1946). Tome II : Paris, Herman (1951).

DYNKIN E., « La structure des algèbres de Lie semi-simples » *Uspeki Math.* Moscou (N.S.) n° 4 (1943). *Amer. Math. Soc. Translation* n° 17.

# Factorisation des polynomes cyclotomiques modulo un nombre premier

PAR

Robert BALLIEU

RÉSUMÉ. On sait que le polynome cyclotomique, correspondant à l'équation $x^m - 1 = 0$, se décompose, modulo un nombre premier $p$, non diviseur de $m$, en facteurs premiers de degré $r$, où $r$ est le plus petit des entiers strictement positifs $t$ tels que $m$ divise $p^t - 1$, (1). Le présent article donne un exposé unifié de la question, en la reprenant depuis la définition des polynomes cyclotomiques. Les propriétés générales, utilisées dans la rédaction, sont des plus réduites. Le cas où $m$ est divisible par $p$, est également traité.

1. *Notations.* — $\mathbf{N}^*$ est l'ensemble des entiers strictement positifs 1, 2, ...; $\mathbf{N}$ est cet ensemble augmenté du nombre 0; $p$ et $p_i$ sont des éléments premiers de $\mathbf{N}^*$; $m$, $n$, $c$, $d$, $l$, $\alpha$, $\alpha_i$, appartiennent à $\mathbf{N}^*$; la notation $d \mid m$ exprime que $d$ divise $m$. Pour $m > 1$,

$$m = {p_1}^{\alpha_1} \ldots {p_l}^{\alpha_l}$$

est la décomposition de $m$ en facteurs premiers $p_i$ distincts.

$\mathbf{K}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}_p$, $\mathbf{Q}$ sont respectivement un champ quelconque, (2), l'anneau des entiers rationnels, le champ des restes modulo $p$, celui des rationnels. Suivant que la caractéristique de $\mathbf{K}$ est 0 ou $p$, $\mathbf{K}$ est considéré comme un prolongement de $\mathbf{Z}$ ou de $\mathbf{Z}_p$.

$\mathbf{K}[x]$ et $\mathbf{Z}[x]$ sont les anneaux de polynomes en $x$ à coefficients dans $\mathbf{K}$ ou dans $\mathbf{Z}$. Dans $\mathbf{K}[x]$, un *polynome normé* est un polynome non nul, où le coefficient du terme de degré le plus élevé est 1; un *polynome premier* est un polynome non constant, normé et indécomposable dans $\mathbf{K}[x]$. Le polynome $x^m - 1$ est noté $f_m$.

(1) Cfr. SERRET, J.A., Cours d'algèbre supérieure, t. II, 143-146 et 148, (Paris, Gauthier-Villars, (1866)); BACHMANN, P., Niedere Zahlentheorie, t. I, 386-387, (Leipzig, Teubner, (1902)). L'énoncé ci-dessus n'est pas donné par ces auteurs, mais bien par PELLET, A.E., (*C. R. Acad. Sc. Paris*, 90, (1880), 1339-1341).

(2) Un champ est un corps commutatif.

Le *polynome cyclotomique* $F_m$ est le polynome $f_1$ si $m = 1$ et, si $m > 1$, il est le produit des termes de la décomposition de $f_m$ en facteurs premiers dans $\mathbf{Q}[x]$, qui ne divisent aucun $f_n$, $(1 \leqslant n < m)$, (1). On établit que $F_m$ est à coefficients entiers. $F_{\mathbf{K},m}$ désigne alors l'image de $F_m$ dans l'homomorphisme $\pi$ de $\mathbf{Z}[x]$ dans $\mathbf{K}[x]$, changeant le polynome $x$ de $\mathbf{Z}[x]$ en le polynome $x$ de $\mathbf{K}[x]$; $F_{\mathbf{K},m}$ est $F_m$ ou $F_{\mathbf{Z}_p,m}$, encore noté $F_{p,m}$, suivant la valeur, 0 ou $p$, de la caractéristique de $\mathbf{K}$.

2. *Si* d *est le plus petit des entiers* n *strictement positifs tels que* $f_n$ *soit divisible, dans* $\mathbf{K}[x]$, *par le facteur* f *de* $f_m$, d *divise* m.

En effet, on a

$$m \geqslant d, \quad m = qd + r, \quad (q \in \mathbf{N}^*;\ 0 \leqslant r < d).$$

Le polynome $f$ divise $f_m - f_d = x^d f_{m-d}$ et est premier avec $x^d$, car il divise $x^m - 1$. Donc, $f$ divise $f_{m-d}$ et, aussi, $f_{m-2d}, \ldots, f_{m-qd} = f_r$. De là, $r = 0$.

*Tout facteur* f *de* $f_m$, *premier dans* $\mathbf{Q}[x]$, *divise un* $F_d$, $(d \mid m)$.

$d$ est fourni par l'énoncé précédent, appliqué à $f$ et $\mathbf{Q}[x]$.

*Pour tout m, on a*

$$f_m = x^m - 1 = \prod_{d \mid m} F_d. \tag{1}$$

En effet, pour $d \mid m$, $f_m$, divisible par $f_d$, l'est par $F_d$; d'où, les $F_d$ étant, en vertu de leur définition, premiers entre eux deux à deux, $f_m$ est divisible par le produit

$$P_m = \prod_{d \mid m} F_d. \tag{2}$$

Chaque facteur premier de $f_m$ dans $\mathbf{Q}[x]$ divise un $F_d$, $(d \mid m)$; comme dans $\mathbf{Q}[x]$, $f_m$, premier avec sa dérivée, n'a pas de facteurs multiples, $f_m$ divise $P_m$.

Les polynomes normés $f_m$ et $P_m$ se divisent mutuellement; ils sont égaux.

*Les polynomes* $F_m$ *sont à coefficients entiers.*

Ce fait est trivial si $m = 1$. Si $m > 1$, on peut supposer, par

(1) Cette définition est pratiquement celle donnée par Kronecker; cfr. Kronecker, L., Vorlesungen über Zahlentheorie, t. I, 281-284, (Leipzig, Teubner, (1901)); cependant, elle ne suppose pas connu le fait que les facteurs premiers (et normés) de $x^m - 1$ dans $\mathbf{Q}[x]$ sont à coefficients entiers. Pour rappel, le produit d'une suite vide d'éléments est, par convention, égal à 1.

récurrence, que le produit

$$P_{(m)} = \prod_{d\,/m,\neq m} F_d$$

est à coefficients entiers. Comme $P_{(m)}$ est normé, la division de $f_m$ par $P_{(m)}$ ne fait pas sortir de $\mathbf{Z}[x]$; donc, son quotient $F_m$ est à coefficients entiers.

Par l'homomorphisme $\pi$, la relation (1) donne :

*Pour tout champ* $\mathbf{K}$, *on a, quel que soit* $m$,

$$x^m - 1 = \prod_{d\,/m} F_{\mathbf{K},d}. \tag{3}$$

Si la caractéristique de $\mathbf{K}$ ne divise pas $m$, $f_m$ n'a pas de facteurs multiples dans $\mathbf{K}[x]$. En vertu de (3), $F_{\mathbf{K},m}$ est alors, pour $d/m$ et $d \neq m$, premier avec $F_{\mathbf{K},d}$ et, aussi, avec $f_d$, puisque, par (3),

$$f_d = \prod_{c\,/d} F_{\mathbf{K},c}.$$

Donc, pour $m > 1$, $F_{\mathbf{K},m}$ est encore, dans ce cas, le produit des facteurs de $f_m$, premiers dans $\mathbf{K}[x]$, qui ne divisent aucun $f_n$, $(1 \leqslant n < m)$, (1); en particulier, *lorsque la caractéristique de* $\mathbf{K}$ *ne divise pas* $m$, $m$ *est, pour chaque diviseur* $f$ *non constant de* $F_{\mathbf{K},m}$, *le plus petit des entiers strictement positifs* $n$ *tels que* $f$ *divise* $f_n$.

3. *Si* $m$ *est premier avec* $p$, *on a*

$$F_{p,mp^\alpha} = (F_{p,m})^{p^\alpha - p^{\alpha-1}}, \quad (\alpha \in \mathbf{N}^*). \tag{4}$$

En effet, sur $\mathbf{Z}_p$,

$$f_{mp^\beta} = (f_m)^{p^\beta}, \quad (\beta \in \mathbf{N}), \ (2),$$

$$f_{mp^\beta} = \prod_{d\,/mp^\beta} F_{p,d} = \prod_{0 \leqslant \gamma \leqslant \beta} \left( \prod_{d\,/m} F_{p,dp^\gamma} \right), \quad (\beta \in \mathbf{N}).$$

---

(1) On aurait pu définir en général $F_{\mathbf{K},m}$ par cette propriété. Lorsque la caractéristique de $\mathbf{K}$ ne divise pas $m$, les raisonnements conduisant à (1) établissent directement la formule (3). Or, pour $m$ fixé, le système des relations

$$x^d - 1 = \prod_{c\,/d} \varphi_c, \qquad (d\,/m),$$

n'admet qu'au plus une solution en fonctions rationnelles $\varphi_c$ de la variable $x$ à coefficients dans $\mathbf{K}$. Donc, les $F_{\mathbf{K},m}$, définis par les deux procédés, sont égaux, lorsque la caractéristique de K ne divise pas $m$. Une méthode directe, valable sans restriction, consiste à définir $F_{\mathbf{K},m}$ comme le quotient normé de $f_m$ par le p.p.c.m. des $f_d$, $(d/m,\ d \neq m)$; cette propriété résulte des formules (3) et (4).

(2) Dans un anneau commutatif de caractéristique $p$, la $p^{\text{ème}}$ puissance d'une somme est la somme des $p^{\text{èmes}}$ puissances des termes de la somme.

De là, exprimant $\frac{f_{mp^\alpha}}{f_{mp^{\alpha-1}}}$ par l'une et l'autre de ces formules,

$$\prod_{d/m} F_{p,dp^\alpha} = (f_m)^{p^\alpha - p^{\alpha-1}} = \left(\prod_{d/m} F_{p,m}\right)^{p^\alpha - p^{\alpha-1}}. \tag{5}$$

Cette formule donne d'abord la formule (4) pour $m = 1$. Puis, si $m > 1$, on a, par récurrence, pour $d/m$ et $d \neq m$,

$$F_{p,dp^\alpha} = (F_{p,d})^{p^\alpha - p^{\alpha-1}}$$

de là, grâce à (5), la formule (4) pour la valeur $m$.

4. *Le degré* $\varphi(m)$ *de* $F_m$, *égal à* 1 *pour* $m = 1$, *vaut*

$$(p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1-1})\ldots(p_l^{\alpha_l} - p_l^{\alpha_l-1})$$

*si* $m = p_1^{\alpha_1}\ldots p_l^{\alpha_l}$; *en particulier,* $F_m$ *n'est pas constant.*

On pose

$$m' = \frac{m}{p_l^{\alpha_l}}.$$

$F_n$ et $F_{p_l,n}$ ont le même degré. Donc, en raison du n° 3,

$$\varphi(m) = \varphi(m')\,(p_l^{\alpha_l} - p_l^{\alpha_l-1})\ ;$$

de là, le résultat annoncé, d'abord pour $l = 1$, puis, par récurrence, pour $l$ quelconque.

5. Soit **K**, un champ de caractéristique $p$. Chaque élément de $\mathbf{Z}_p$ est racine de l'équation

$$x^p = x, \tag{6}$$

(théorème de Fermat), qui n'a donc aucune autre racine dans **K**.

Dans **K**, on a

$$(u-v)^p = u^p - v^p;$$

les relations

$$u^p = v^p, \quad u = v, \tag{7}$$

sont donc équivalentes sur **K**.

Pour tout polynome

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots$$

de $\mathbf{Z}_p[x]$, on a

$$(f(x))^p = a_0^p + a_1^p x^p + \ldots = a_0 + a_1 x^p + \ldots = f(x^p). \tag{8}$$

Si alors, $a$ est une racine de $f$ dans **K**, on a successivement, par (8),

$$f(a^p) = 0,\ f(a^{p^2}) = 0,\ldots\ .$$

Le polynome $f$ n'admet qu'un nombre fini de racines; la suite

$$a,\ a^p,\ a^{p^2},\ldots$$

présente une répétition, soit

$$a^{p^m} = a^{p^n},\ (m < n).$$

De là, successivement, en vertu de (7),

$$a^{p^{m-1}} = a^{p^{n-1}},\ a^{p^{m-2}} = a^{p^{n-2}},\ \ldots,\ a = a^{p^{n-m}}.$$

Soit $s$ le plus petit des entiers strictement positifs $t$ tels que

$$a^{p^t} = a.$$

On forme

(9) $$g(x) = (x-a)\ (x-a^p)\ \ldots\ (x-a^{p^{s-2}})\ (x-a^{p^{s-1}});$$

il vient

(10) $$(g(x))^p = (x^p-a^p)\ (x^p-a^{p^2})\ \ldots\ (x^p-a^{p^{s-1}})\ (x^p-a) = g(x^p).$$

Mais, de

$$g(x) = b_0 + b_1x + \ldots,$$

on tire

$$(g(x))^p = b_0^p + b_1^px^p + \ldots,$$
$$g(x^p) = b_0 + b_1x^p + \ldots .$$

De là, en raison de (10), $b_i = b_i^p$. Les $b_i$ sont racines de (6); $g(x)$ est dans $\mathbf{Z}_p[x]$. Ses racines sont simples; elles annulent $f$; donc, $g$ divise $f$.

On suppose de plus que $f$ soit de degré $r$ et premier dans $\mathbf{Z}_p[x]$. L'image $\bar{x}$ de $x$ dans l'homomorphime canonique de $\mathbf{Z}_p[x]$ sur $\mathbf{K} = \frac{\mathbf{Z}_p[x]}{(f)}$ est une racine de $f$. Le polynome $g$, correspondant à cette racine, divise $f$, appartient à $\mathbf{Z}_p[x]$ et est de degré $s$ non nul. Donc $s = r$, où $s$ est le plus petit des entiers strictement positifs $t$ tels que $f$ divise $x^{p^t} - x$. Ainsi,

*Dans $\mathbf{Z}_p[x]$, les facteurs premiers de $x^{p^t} - x$ sont de degré $r \leqslant t$; les polynomes de degré $r$, premiers dans $\mathbf{Z}_p[x]$, divisent $x^{p^r} - x$.*

Soit $m$ premier avec $p$ et soit $f$ un facteur de $F_{p,m}$, premier dans $\mathbf{Z}_p[x]$ et de degré $r$; $f$ divise $x^{p^r} - x = xf_{p^r-1}$; donc, il divise $f_{p^r-1}$; par conséquent, (n° 2), $m$ divise $p^r - 1$. En outre, si $m$ divise $p^t - 1$, $f$ divise $x^{p^t} - x$; donc, $t \geqslant r$. Ainsi,

*Pour $m$ premier avec $p$, les facteurs de $F_{p,m}$, premiers dans $\mathbf{Z}_p[x]$, sont de degré égal au plus petit des entiers strictement positifs $t$ tels que $m$ divise $p^t - 1$.*

# A Generalisation of Bessel-Maitland Function

BY

A. M. CHAK
(The University, Lucknow, India)

1. Introduction : The applications of Wright's function $J^{\mu}_{\lambda}(x)$ in various branches of mathematics are well-known. Wright [1] gave its applications to the theory of numbers and V. Bernstein [2] has given its application to the study of the growth of analytic functions. Its applications to generalise several known formulae in operational calculus have recently been given by Srivastava [3] in his thesis. *

The present paper shows how the operational calculus of $n$ variables can be used to generalise known functions to $n$ variables. We here study the function

$$J^{\mu_1,\ldots\ \mu_n}_{\lambda_1,\ldots\ \lambda_n}(x) = \sum_{\gamma=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\gamma}\, x^{\gamma}}{\gamma!\ \prod_{\alpha=1}^{n} \Gamma(\lambda_{\alpha} + \mu_{\alpha}\,\gamma + 1)} \qquad (1)$$

given by its operational image in $n$ variables (by Carson's sense)

$$x_1^{\lambda_1} \ldots x_n^{\lambda_n}\, J^{\mu_1,\ldots,\ \mu_n}_{\lambda_1,\ldots,\ \lambda_n}(x_1^{\mu_1} \ldots x_n^{\mu_n})$$

$$\supset \frac{e^{-\frac{1}{p_1^{\mu_1} \ldots p_n^{\mu_n}}}}{p_1^{\lambda_1} \ldots p_n^{\lambda_n}} \qquad (2)$$

We will assume $\sigma_n = 1 + \mu_1 + \ldots + \mu_n > 0$ and $\mu_1, \ldots, \mu_n$ real and positive.

The function $J^{\mu_1,\ldots,\ \mu_n}_{\lambda_1,\ldots,\ \lambda_n}(x)$ is a particular case of the generalised hypergeometric function [4]

$${}_pF_q = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(n)}{\Gamma(n+1)}\, z^n,$$

* Earlier H. C. Gupta and R. P Agarwal have used the function $J^{\mu}_{\lambda}$ in their work. in 1948, and 1950 respectively.

where

$$f(t) = \prod_{\gamma=1}^{p} \Gamma(\beta_\gamma + \alpha_\gamma t) \left\{ \prod_{\gamma=1}^{q} \Gamma(\mu_\gamma + \rho_\gamma t) \right\}^{-1}.$$

In particular, if $f(t)$ has no poles at the points $t = 0, 1, 2, \ldots$ and $\sigma_n > 0$, then ${}_0F_n\ (-z) \equiv J^{\mu_1, \ldots, \mu_n}_{\lambda_1, \ldots, \lambda_n}(z)$, is an integral function [5].

**2.** Some operational and other relationships : Let $\varphi(p) \subset f(x)$ and $\varphi(p, q) \subset\subset f(x, y)$, we then easily have the following generalisations of the well-known Tricomi's formula :

$$\frac{1}{p_1^{\lambda_1 - \mu_1} \ldots p_n^{\lambda_n - \mu_n}} \varphi\left(\frac{1}{p_1^{\mu_1} \ldots p_n^{\mu_n}}\right) \tag{3}$$

$$\subset \int_0^\infty x_1^{\lambda_1} \ldots x_n^{\lambda_n} J^{\mu_1, \ldots, \mu_n}_{\lambda_1, \ldots, \lambda_n}(x\, x_1^{\mu_1} \ldots x_n^{\mu_n})\, f(x)\, dx,$$

and

$$\frac{1}{p_1^{\lambda_1 - \mu_1} \ldots p_n^{\lambda_n - \mu_n}} \cdot \frac{1}{q_1^{\eta_1 - \nu_1} \ldots q_m^{\eta_m - \nu_m}} \varphi\left(\frac{1}{p_1^{\mu_1} \ldots p_n^{\mu_n}}, \frac{1}{q_1^{\nu_1} \ldots q_m^{\nu_m}}\right)$$

$$\subset\subset \int_0^\infty \int_0^\infty x_1^{\lambda_1} \ldots x_n^{\lambda_n} J^{\mu_1, \ldots, \mu_n}_{\lambda_1, \ldots, \lambda_n}(x\, x_1^{\mu_1} \ldots x_n^{\mu_n}). \tag{3'}$$

$$y_1^{\eta_1} \ldots y_m^{\eta_m} J^{\nu_1, \ldots, \nu_m}_{\eta_1, \ldots, \eta_m}(y\, y_1^{\nu_1} \ldots y_m^{\nu_m})\, f(x, y)\, dx\, dy.$$

We can also prove the interesting operational relation

$$\frac{1}{p^{\lambda_1}} J^{\mu_2, \ldots, \mu_n}_{\lambda_2, \ldots, \lambda_n}\left(\frac{1}{p^{\mu_1}}\right) \subset x^{\lambda_1} J^{\mu_1, \ldots, \mu_n}_{\lambda_1, \ldots, \lambda_n}(x^{\mu_1}). \tag{4}$$

We know that [3] $\left(\text{for } \frac{\nu}{n} \neq 0, -1, -2 \ldots\right)$,

$$J^n_\nu(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu}{n}\right)}{n} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left\{\Gamma\left(\frac{\nu}{n} + r + 1\right)\right\}^{-1} x^r J^n_{\nu + nr - 1}(x).$$

Hence, it is easy to prove that

$$J^{n, \mu}_{\nu, \lambda}(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu}{n}\right)}{n} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\nu}{n} + r + 1\right)} x^r J^{n, \mu}_{\nu + nr - 1,\ \lambda + \mu r}(x). \tag{6}$$

From (1), we get the following generalisation of Soninés Integral :

$$\int_0^{\pi/2} \cdots \int_0^{\pi/2} J_{\lambda_1, \ldots, \lambda_n}^{\mu_1 n, \ldots, \mu_u} (x \sin^{2\mu_1} \theta_1 \ldots \sin^{2\mu_n} \theta_n).$$

$$. \sin^{2\lambda_1+1} \theta_1 \ldots \sin^{2\lambda_n+1} \theta_n . \cos^{2m_1-1} \theta_1 \ldots \cos^{2m_n-1} \theta_n \, d\theta_1 \ldots d\theta_n$$

$$= \frac{1}{2^n} \prod_{\alpha=1}^{n} \Gamma(m_\alpha) \, J_{\lambda_1+m_1, \ldots, \lambda_n+m_n}^{\mu_1, \ldots, \mu_n} (x). \tag{7}$$

Again,

$$\sum_{\gamma=0}^{\infty} \frac{t_1^{\lambda_1+\mu_1\gamma} \ldots t_n^{\lambda_n+\mu_n\gamma}}{\gamma !} J_{\lambda_1+\mu_1\gamma, \ldots, \lambda_n+\mu_n\gamma}^{\mu_1, \ldots, \mu_n} (t_1^{\mu_1} \ldots t_n^{\mu_n})$$

$$\supset \sum_{n} \sum_{\gamma=0}^{\infty} \frac{1}{\gamma !} \cdot \frac{e^{-\frac{1}{p_1^{\mu_1} \ldots p_n^{\mu_n}}}}{p_1^{\lambda_1+\mu_1\gamma} \ldots p_n^{\lambda_n+\mu_n\gamma}},$$

which gives after a little simplification and then on interpretation

$$\frac{1}{\prod_{\alpha=1}^{n} \Gamma(\lambda_\alpha + 1)} = \sum_{\gamma=0}^{\infty} \frac{t^\gamma}{\gamma !} J_{\lambda_1+\mu_1\gamma, \ldots, \lambda_n+\mu_n\gamma}^{\mu_1, \ldots, \mu_n} (t). \tag{8}$$

**2.** Relations of recurrence : There are numerous relations of recurrence. The symbolic calculus of $n$ variables permits us to establish them whatever be the numbers $\lambda_i$. We do not give the calculations but enlist some of the important relations of recurrence which are easily derivable from the operational relation (2).

$$J_{\lambda_1-1, \lambda_2 \ldots, \lambda_n}^{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n} (x) + \mu_1 x \, J_{\lambda_1+\mu_1, \ldots, \lambda_n+\mu_n}^{\mu_1, \ldots, \mu_n} (x) = \lambda_1 \, J_{\lambda_1, \ldots, \lambda_n}^{\mu_1, \ldots, \mu_n} (x). \tag{9}$$

$$J_{\lambda_1-1, \lambda-1, \lambda_3, \ldots, \lambda_n}^{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n} (x) + (\lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1 + \mu_1\mu_2) x \, J_{\lambda_1+\mu_1 \ldots, \lambda_n+\mu_n}^{\mu_1, \ldots, \mu_n} (x)$$

$$= \lambda_1 \lambda_2 \, J_{\lambda_1, \ldots, \lambda_n}^{\mu_1, \ldots, \mu_n} (x) + \mu_1\mu_2 x^2 \, J_{\lambda_1+2\mu_1 \ldots, \lambda_n+2\mu_n}^{\mu_1 \ldots, \mu_n} (x). \tag{10}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dx} J_{\lambda_1, \ldots, \lambda_n}^{\mu_1, \ldots, \mu_n} (x) = - J_{\lambda_1+\mu_1, \ldots, \lambda_n+\mu_n}^{\mu_1, \ldots, \mu_n} (x) \\ &\text{or} \\ &J_{\lambda_1, \ldots, \lambda_n}^{\mu_1, \ldots, \mu_n} (x) = - \int_0^x J_{\lambda_1+\mu_1, \ldots, \lambda_n+\mu_n}^{\mu_1, \ldots, \mu_n} (y) dy. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

$$\left.\begin{aligned} &\mu_1 x \frac{d}{dx} J^{\mu_1,\ldots,\mu_n}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}(x) + \lambda_1 J^{\mu_1,\ldots,\mu_n}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}(x) = J^{\mu_1,\ldots,\mu_n}_{\lambda_1-1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n}(x) \\ &\text{or} \\ &\mu_1 x^{\lambda_1/\mu_1} J^{\mu_1,\ldots,\mu_n}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}(x) = \int_0^x y^{\frac{\lambda_1}{\mu_1}-1} J^{\mu_1,\ldots,\mu_n}_{\lambda_1-1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n}(y)\,dy. \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Let $A_\gamma = \frac{\lambda_\gamma}{\eta_\gamma}$, then (12) gives on further differentiation

$$J''^{\mu_1,\ldots,\mu_n}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}(x) + \frac{A_1}{x} J'^{\mu_1,\ldots,\mu_n}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}(x) - \frac{A_1}{x^2} J^{\mu_1,\ldots,\mu_n}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}(x)$$

$$= \frac{1}{\mu_1 x} J'^{\mu_1,\ldots,\mu_n}_{\lambda_1-1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n}(x) - \frac{1}{\mu_1 x^2} J^{\mu_1,\ldots,\mu_n}_{\lambda_1-1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n}(x)$$

Using the above relation together with the relations got from (12) by putting $\frac{\lambda_1}{\mu_1} = A_1$ and $\frac{\lambda_2}{\mu_2} = A_2$, we can easily eliminate

$J'^{\mu_1,\ldots,\mu_n}_{\lambda_1-1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n}(x)$ and $J^{\mu_1,\ldots,\mu_n}_{\lambda_1-1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n}(x)$ and get for $y = J^{\mu_1,\ldots,\mu_n}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}(x)$

$$y'' + \frac{A_1 + A_2 + 1}{x} y' + \frac{A_1 A_2}{x^2} y = \frac{1}{\mu_1 \mu_2 x^2} J^{\mu_1,\ldots,\mu_n}_{\lambda_1-1,\lambda_2-1,\lambda_3,\ldots,\lambda_n}(x). \quad (13)$$

We can similarly get

$$y''' + \frac{\Sigma A_1 + 3}{x} y'' + \frac{\Sigma A_1 + \Sigma A_1 A_2 + 1}{x^2} y' + \frac{A_1 A_2 A_3}{x^3} y$$

$$= \frac{1}{\mu_1 \mu_2 \mu_3 x^3} J^{\mu_1,\ldots,\mu_n}_{\lambda_1-1,\lambda_2-1,\lambda_3-1,\lambda_4,\ldots,\lambda_n}(x), \quad (14)$$

$$y^{IV} + \frac{\Sigma A_1 + 6}{x} y''' + \frac{\Sigma A_1 A_2 + 3\Sigma A_1 + 7}{x^2} y''$$

$$+ \frac{\Sigma A_1 A_2 A_3 + \Sigma A_1 A_2 + \Sigma A_1 + 1}{x^3} y' + \frac{A_1 A_2 A_3 A_4}{x^4} y$$

$$= \frac{1}{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4 x^4} J^{\mu_1,\ldots,\mu_n}_{\lambda_1-1,\ldots,\lambda_4-1,\lambda_5,\ldots,\lambda_n}(x), \quad (15)$$

and so on. We can easily get the most general form of relation involving the derivative of order $k$ of $J^{\mu_1,\ldots,\mu_n}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}(x)$. In (14), the

sums $\Sigma$ are related to the three numbers $A_1$, $A_2$, $A_3$ and in (15) to the four numbers $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$. The relations (13), (14), (15) and the analogous relations will permit us to calculate $J^{\mu_1,\ldots,\mu_n}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}(x)$ as a function of $J^{\mu_1,\ldots,\mu_n}_{\lambda_1-1,\lambda_2-1,\lambda_3,\ldots,\lambda_n}(x)$, or of $J^{\mu_1\ldots,\mu_n}_{\lambda_1-1,\lambda_2-1,\lambda_3-1,\lambda_4\ldots,\lambda_n}(x)$, or of $J^{\mu_1,\ldots,\mu_n}_{\lambda_1-1,\ldots,\lambda_4-1,\lambda_5,\ldots,\lambda_n}(x)$. Indeed (13), for example, shows that the corresponding linear homogeneous equation has for its auxiliary equation (on putting $y = x^\gamma$)

$$\gamma^2 + (A_1 + A_2)\gamma + A_1A_2 = 0,$$

whose roots are $-A_1$ and $-A_2$. It is easy to see, on using (12), that the general integral of the differential equation (13) is

$$y = \frac{1}{A_2 - A_1}\left[\frac{1}{\mu_2} J^{\mu_1,\ldots,\mu_n}_{\lambda_1,\lambda_2-1,\lambda_3,\ldots,\lambda_n}(x) + \frac{K_1}{x^{A_1}}\right] + \frac{1}{A_1 - A_2}\left[\frac{1}{\mu_1} J^{\mu_1,\ldots,\mu_n}_{\lambda_1-1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n}(x) + \frac{K_2}{x^{A_2}}\right]. \tag{16}$$

For rediscovering the particular solution $y = J^{\mu_1,\ldots,\mu_n}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}(x)$ it is necessary to make the constants $K_1$ and $K_2$ zero. From (14), we similarly have (for $K_1 = K_2 = K_3 = 0$)

$$y = \frac{1}{(A_2 - A_1)(A_3 - A_1)} \cdot \frac{1}{\mu_2\,\mu_3} J^{\mu_1,\ldots,\mu_n}_{\lambda_1,\lambda_2-1,\lambda_3-1,\lambda_4,\ldots,\lambda_n}(x) + \frac{1}{(A_1 - A_2)(A_3 - A_2)} \cdot \frac{1}{\mu_1\,\mu_3} J^{\mu_1,\ldots,\mu_n}_{\lambda_1-1,\lambda_2,\lambda_3-1,\lambda_4,\ldots,\lambda_n}(x) + \frac{1}{(A_1 - A_3)(A_2 - A_3)} \cdot \frac{1}{\mu_1\,\mu_2} J^{\mu_1,\ldots,\mu_n}_{\lambda_1-1,\lambda_2-1,\lambda_3,\ldots,\lambda_n}(x). \tag{17}$$

We then have in a most general way the relation of recurrence

$$J^{\mu_1,\ldots,\mu_n}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}(x) = \sum_{\gamma=1}^{m} \frac{1}{(A_1 - A_\gamma)\ldots(A_m - A_\gamma)} \cdot \frac{1}{\mu_1\ldots\mu_{\gamma-1}\,\mu_{\gamma+1}\ldots\mu_m} \times \times J^{\mu_1,\ldots\ldots,\mu_n}_{\lambda_1-1,\ldots,\lambda_{\gamma-1}-1,\lambda_\gamma,\lambda_{\gamma+1}-1,\ldots,\lambda_m-1,\lambda_{m+1},\ldots,\lambda_n}(x), \tag{18}$$

where $n \geqslant m \geqslant \gamma$, $K_1 = K_2 = \ldots = K_m = 0$ and none of the terms $A_1, \ldots, A_m = A_\gamma$ and $A_1, \ldots, A_m$ are all different.

We can easily verify (18) by direct calculation.

If the $A_j$'s are all equal to A, we have

$$x^{A}\, J^{\mu_1,\ldots,\mu_n}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}(x) = \frac{1}{\mu_1\ldots,\mu_n}\underbrace{\int\frac{dx}{x}\cdots\int\frac{dx}{x}}_{(n-1)\text{ times}}\int x^{A-1}\, J^{\mu_1,\ldots,\mu_n}_{\lambda_1-1,\ldots,\lambda_n-1}(x)dx. \quad (19)$$

This too can be verified by direct calculation or more easily by repeated application of the second form of (12).

It is easy to determine the coefficients which occur in the relations which generalise (13), (14), (15), hence we omit their determination.

**3.** The Differential Equation : Let $D \equiv \frac{d}{dx}$, then (12) gives

$$(\mu_1 xD+\lambda_1-\mu_1+1)\ldots(\mu_1 xD+\lambda_1-1)(\mu_1 xD+\lambda_1)y = J^{\mu_1,\ldots,\mu_n}_{\lambda_1-\mu_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n}(x),$$

i.e.,

$$F^{\mu_1}_{\lambda_1}(D)\, y = J^{\mu_1,\ldots,\mu_n}_{\lambda_1-\mu_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n}(x),$$

where $F^{\mu_\gamma}_{\lambda_\gamma}(D) \equiv (\mu_\gamma x D+\lambda_\gamma-\mu_\gamma+1)\ldots(\mu_\gamma x D+\lambda_\gamma-1)(\mu_\gamma x D+\lambda_\gamma)$.

Applying this operator $F^{\mu_\gamma}_{\lambda_\gamma}(D)$ successively (for $r = 1, 2, \ldots, n$) on $y$, we get

$$F^{\mu_n}_{\lambda_n}(D)\ldots F^{\mu_2}_{\lambda_2}(D)\, F^{\mu_1}_{\lambda_1}(D)\, y = J^{\mu_1,\ldots,\mu_n}_{\lambda_1-\mu_1,\ldots,\lambda_n-\mu_n}(x).$$

Differentiating this once more and using (11), we finally have

$$a_{\sigma_n} x^{\sigma_n} y^{(\sigma_n)} + a_{\sigma_n-1} x^{\sigma_n-1} y^{(\sigma_n-1)} + \ldots + a_1 x y' + xy = 0, \quad (20)$$

where $\sigma_n = 1 + \mu_1 + \ldots + \mu_n$, and the coefficients $a_1, \ldots, a_{\sigma_n}$ can all be determined as functions of $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ and $\mu_1, \ldots, \mu_n$; also $\mu_1, \ldots, \mu_n$ are all positive integers or zero, the order of the differential equation (20) being $\sigma_n$, i.e., $1 + \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n$.

**4.** Functions $\mathrm{ber}^{\mu_1,\ldots,\mu_n}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}(x)$ and $\mathrm{bei}^{\mu_1,\ldots,\mu_n}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}(x)$ :

We introduce $\mathrm{ber}^{\mu_1,\ldots,\mu_n}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}(x)$ and $\mathrm{bei}^{\mu_1,\ldots,\mu_n}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}(x)$ on putting

$$J^{\mu_1,\ldots,\mu_n}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}(-xi) = \mathrm{ber}^{\mu_1,\ldots,\mu_n}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}(x) + i\ \mathrm{bei}^{\mu_1,\ldots,\mu_n}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}(x).$$

Therefore, we have

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{ber}^{\mu_1,\ldots,\mu_n}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \cdot \frac{x^{2k}}{\prod_{\alpha=1}^{n} \Gamma(\lambda_\alpha + 2\mu_\alpha k + 1)}, \\
\operatorname{bei}^{\mu_1,\ldots,\mu_n}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot \frac{x^{2k+1}}{\prod_{\alpha=1}^{n} \Gamma(\lambda_\alpha + 2k+1 \,.\, \mu_\alpha + 1)}
\end{aligned}\right\} \quad (21)$$

In particular,

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{ber}^{1,1,\ldots,1}_{0,0,\ldots,0}(x) &= 1 - \frac{x^2}{(2!)^{n+1}} + \frac{x^4}{(4!)^{n+1}} - \ldots + \frac{(-1)^k x^{2k}}{[(2k)!]^{n+1}} + \ldots \\
\operatorname{bei}^{1,1,\ldots,1}_{0,0,\ldots,0}(x) &= x - \frac{x^3}{(3!)^{n+1}} + \frac{x^5}{(5!)^{n+1}} - \ldots + \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{[(2k+1)!]^{n+1}} - \ldots
\end{aligned}\right\} \quad (22)$$

Images of these functions in symbolic calculus of one variable and $n$ variables are given respectively by

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{p^{\lambda_1}} \operatorname{ber}^{\mu_2,\ldots,\mu_n}_{\lambda_2,\ldots,\lambda_n}\left(\frac{1}{p^{\mu_1}}\right) &\subset x^{\lambda_1} \operatorname{ber}^{\mu_1,\ldots,\mu_n}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}(x^{\mu_1}), \\
\frac{1}{p^{\lambda_1}} \operatorname{bei}^{\mu_2,\ldots,\mu_n}_{\lambda_2,\ldots,\lambda_n}\left(\frac{1}{p^{\mu_1}}\right) &\subset x^{\lambda_1} \operatorname{bei}^{\mu_1,\ldots,\mu_n}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}(x^{\mu_1}),
\end{aligned}\right\} \quad (23)$$

and

$$\left.\begin{aligned}
x_1^{\lambda_1} \ldots x_n^{\lambda_n} \operatorname{ber}^{\mu_1,\ldots,\mu_n}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}(x_1^{\mu_1} \ldots x_n^{\mu_n}) &\supset_n \frac{1}{p_1^{\lambda_1} \ldots p_n^{\lambda_n}} \cos\left(\frac{1}{p_1^{\mu_1} \ldots p_n^{\mu_n}}\right), \\
x_1^{\lambda_1} \ldots x_n^{\lambda_n} \operatorname{bei}^{\mu_1,\ldots,\mu_n}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}(x_n^{\mu_1} \ldots x_n^{\mu_n}) &\supset_n \frac{1}{p_1^{\lambda_1} \ldots p_n^{\lambda_n}} \sin\left(\frac{1}{p_1^{\mu_1} \ldots p_n^{\mu_n}}\right).
\end{aligned}\right\} \quad (24)$$

Let us introduce $(n+1)$ variables and get

$$\left.\begin{aligned}
x_1^{\lambda_1} \ldots x_n^{\lambda_n} \operatorname{ber}^{\mu_1,\ldots,\mu_n}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}(x_1^{\mu_1} \ldots x_n^{\mu_n} x_{n+1}) &\supset_{n+1} \frac{p_1^{2\mu_1} \ldots p_n^{2\mu_n} p_{n+1}^2}{p_1^{2\mu_1} \ldots p_n^{2\mu_n} p_{n+1}^2 + 1} \cdot \frac{1}{p_1^{\lambda_1} \ldots p_n^{\lambda_n}} \\
x_1^{\lambda_1} \ldots x_n^{\lambda_n} \operatorname{bei}^{\mu_1,\ldots,\mu_n}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}(x_1^{\mu_1} \ldots x_n^{\mu_n} x_{n+1}) &\supset_{n+1} \frac{p_1^{\mu_1} \ldots p_n^{\mu_n} p_{n+1}}{p_1^{2\mu_1} \ldots p_n^{2\mu_n} p_{n+1}^2 + 1} \cdot \frac{1}{p_1^{\lambda_1} \ldots p_n^{\lambda_n}} \\
x_1^{\lambda_1} \ldots x_n^{\lambda_n} \operatorname{J}^{\mu_1,\ldots,\mu_n}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}(x_1^{\mu_1} \ldots x_n^{\mu_n} x_{n+1}) &\supset_{n+1} \frac{p_1^{\mu_1} \ldots p_n^{\mu_n} p_{n+1}}{p_1^{\mu_1} \ldots p_n^{\mu_n} p_{n+1} + 1} \cdot \frac{1}{p_1^{\lambda_1} \ldots p_n^{\lambda_n}}
\end{aligned}\right\} \quad (25)$$

In particular, from (25) we have on taking $n = 1$ and then $\lambda = 0$, $\mu = 1$,

$$\left.\begin{aligned} x^{\lambda}\,\mathrm{ber}_{\lambda}^{\mu}(x^{\mu}y) &\underset{2}{\supset} \frac{p^{2\mu}q^{2}}{p^{2\mu}q^{2}+1}\cdot\frac{1}{p^{\lambda}}\,; \quad \mathrm{ber}^{1}{}_{o}(xy) \underset{2}{\supset} \frac{p^{2}q^{2}}{p^{2}q^{2}+1} \\ x^{\lambda}\,\mathrm{bei}_{\lambda}^{\mu}(x^{\mu}y) &\underset{2}{\supset} \frac{p^{\mu}q}{p^{2\mu}q^{2}+1}\cdot\frac{1}{p^{\lambda}}\,; \quad \mathrm{bei}^{1}{}_{o}(xy) \underset{2}{\supset} \frac{pq}{p^{2}q^{2}+1} \\ x^{\lambda}\,\mathrm{J}_{\lambda}^{\mu}(x^{\mu}y) &\underset{2}{\supset} \frac{p^{\mu}q}{p^{\mu}q+1}\cdot\frac{1}{p^{\lambda}}\,; \quad \mathrm{J}^{1}{}_{o}(xy) \underset{2}{\supset} \frac{pq}{pq+1}\,. \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Other formulae can be obtained for number of variables $k < n$, such as

$$x_1^{\lambda_1}\ldots x_k^{\lambda_k}\,\mathrm{J}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}^{\mu_1,\ldots,\mu_n}(x_1^{\mu_1}\ldots x_k^{\mu_k}) \underset{k}{\supset} \frac{1}{p_1{}^{\lambda_1}\ldots p_m^{\lambda_n}}\,\mathrm{J}_{\lambda_{k+1},\ldots,\lambda_n}^{\mu_{k+1},\ldots,\mu_n}\left(\frac{1}{p_1{}^{\mu_1}\ldots p_k{}^{\mu_k}}\right).$$

The following two cases of (27) are interesting and useful (§ 5) :

$$(x_1\ldots x_k)^m\,\mathrm{J}_{m,\ldots m,\lambda_{k+1},\ldots,\lambda_n}^{\mu_1,\ldots,\mu_n}(x_1^{\mu_1}\ldots x_k^{\mu_k}) \underset{k}{\supset} \frac{1}{(p_1\ldots p_k)^m}\,\mathrm{J}_{\lambda_{k+1},\ldots,\lambda_n}^{\mu_{k+1},\ldots,\mu_n}\left(\frac{1}{p_1{}^{\mu_1}\ldots p_k{}^{\mu_k}}\right), \tag{28}$$

$$x_1^{m-1}(x_2\ldots x_k)^m\,\mathrm{J}_{m-1,\,m,\ldots,\,m,\,\lambda_{k+1},\ldots,\,\lambda_n}^{\mu_1,\ldots,\,\mu_n}(x_1^{\mu_1}\ldots x_k^{\mu_k}) \underset{k}{\supset} \frac{1}{p_1^{m-1}(p_2\ldots p_k)^m}\,\mathrm{J}_{\lambda_{k+1},\ldots,\lambda_n}^{\mu_{k+1},\ldots,\mu_n}\left(\frac{1}{p_1{}^{\mu_1}\ldots p_k{}^{\mu_k}}\right). \tag{29}$$

For the recurrence relations satisfied by $\mathrm{ber}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}^{\mu_1,\ldots,\mu_n}(x)$ and $\mathrm{bei}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}^{\mu_1,\ldots,\mu_n}(x)$ we give (without proof) the following formulae :

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{ber}_{\lambda_1-1,\,\lambda_2,\ldots,\lambda_n}^{\mu_1,\ldots,\mu_n}(x) + \mu_1 x\,\mathrm{bei}_{\lambda_1+\mu_1,\ldots,\lambda_n+\mu_n}^{\mu_1,\ldots,\mu_n}(x) = \lambda_1\,\mathrm{ber}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}^{\mu_1,\ldots,\mu_n}(x) \\ &\mathrm{bei}_{\lambda_1,-1,\,\lambda_2,\ldots,\lambda_n}^{\mu_1\ldots,\mu_n}(x) - \mu_1 x\,\mathrm{ber}_{\lambda_1+\mu_1,\ldots,\lambda_n+\mu_n}^{\mu_1,\ldots,\mu_n}(x) = \lambda_1\,\mathrm{bei}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}^{\mu_1,\ldots,\mu_n}(x). \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dx}\,\mathrm{ber}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}^{\mu_1,\ldots,\mu_n}(x) &= -\,\mathrm{bei}_{\lambda_1+\mu_1,\ldots,\lambda_n+\mu_n}^{\mu_1,\ldots,\mu_n}(x), \\ \frac{d}{dx}\,\mathrm{bei}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}^{\mu_1,\ldots,\mu_n}(x) &= \quad\mathrm{ber}_{\lambda_1+\mu_1,\ldots,\lambda_n+\mu_n}^{\mu_1,\ldots,\mu_n}(x). \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

$$\mu_1 x \frac{d}{dx} \operatorname{ber}^{\mu_1,\ldots,\mu_n}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}(x) + \lambda_1 \operatorname{ber}^{\mu_1,\ldots,\mu_n}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}(x) = \operatorname{ber}^{\mu_1,\ldots,\mu_n}_{\lambda_1-1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n}(x) \quad (32)$$

Now (12) and (32) have exactly the same form so the recurrence relations (13) to (19) will be retained in form for $\operatorname{ber}^{\mu_1,\ldots,\mu_n}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}(x)$ and $\operatorname{bei}^{\mu_1,\ldots,\mu_n}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}(x)$ as they were for $J^{\mu_1,\ldots,\mu_n}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}(x)$. Also, the differential equation (20) is the same for the three functions.

**5.** Formulae of differentation with respect to indices :

The formulae of differentiation with respect to the index $n$ of $J_n(x)$ has been given by Van der Pol. It has been generalised for the functions $J_{m,n}(x)$ by P. Humbert. Their method can be easily extended to our $J^{\mu_1,\ldots,\mu_n}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}(x)$ function of any order (in particular, of Wright's $J^{\mu}_{\lambda}(x)$ function) and will permit us to obtain the derivative of $J^{\mu_1,\ldots,\mu_n}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}(x)$ with respect to one of the indices. Similar formulae can easily be found for $\operatorname{ber}^{\mu_1,\ldots,\mu_n}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}(x)$ and $\operatorname{bei}^{\mu_1,\ldots,\mu_n}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}(x)$ functions.

On differentiating with respect to $\lambda$, the symbolic relation (4), we have

$$x^{\lambda_1} \log x \, J^{\mu_1,\ldots,\mu_n}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}(x^{\mu_1}) + x^{\lambda_1} \frac{\partial}{\partial \lambda_1} J^{\mu_1,\ldots,\mu_n}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}(x^{\mu_1})$$

$$\supset \frac{1}{p^{\lambda_1}} (-\log p) \, J^{\mu_1,\ldots,\mu_n}_{\lambda_2,\ldots,\lambda_n}\left(\frac{1}{p^{\mu_1}}\right).$$

On applying the product theorem [6] we get [$\gamma$ being Euler's constant]

$$x^{\lambda_1} \log x \, J^{\mu_1,\ldots,\mu_n}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}(x^{\mu_1}) + x^{\lambda_1} \frac{\partial}{\partial \lambda_1} J^{\mu_1,\ldots,\mu_n}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}(x^{\mu_1})$$

$$= (\log x + \gamma) \int_0^x y^{\lambda_1 - 1} \, J^{\mu_1,\ldots,\mu_n}_{\lambda_1-1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n}(y^{\mu_1}) \, dy$$

$$+ \int_0^x \log\left(1 - \frac{y}{x}\right) y^{\lambda_1 - 1} \, J^{\mu_1,\ldots,\mu_n}_{\lambda_1-1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n}(y^{\mu_1}) \, dy .$$

Therefore, by using (12), we finally have the formula

$$\frac{\partial}{\partial\lambda_1} J^{\mu_1,\ldots,\mu_n}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}(x) = \gamma\, J^{\mu_1,\ldots,\mu_n}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}(x) + \frac{1}{\mu_1}\int_0^x \log\left[1-\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{\mu_1}}\right]\left(\frac{y}{x}\right)^{\lambda_1/\mu_1} J^{\mu_1,\ldots,\mu_n}_{\lambda_1-1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n}(y)\,\frac{dy}{y}. \quad (33)$$

Now, differentiate with respect to $m$ the operational relation (2) (for $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = m$) and get

$$(x_1 \ldots x_n)^m \log(x_1 \ldots x_n)\, J^{\mu_1,\ldots,\mu_n}_{m,\ldots,m}(x_1^{\mu_1}\ldots x_n^{\mu_n}) + (x_1\ldots x_n)^m \frac{\partial}{\partial m} J^{\mu_1,\ldots,\mu_n}_{m,\ldots,m}(x_1^{\mu_1}\ldots x_n^{\mu_n}) \supset \frac{-\log(p_1\ldots p_n)}{(p_1\ldots p_n)^n}\cdot e^{-\frac{1}{p_1^{\mu_1}\ldots p_n^{\mu_n}}}.$$

We shall now apply the product theorem for the symbolic calculus of $n$ variables and use the relation [see (12)]

$$\int_0^{x_1}\ldots\int_0^{x_n}(u_1\ldots u_n)^{m-1}\, J^{\mu_1,\ldots,\mu_n}_{m-1,\ldots,m-1}(u_1^{\mu_1}\ldots u_n^{\mu_n})\,du_1\ldots du_n = (x_1\ldots x_n)^m\, J^{\mu_1,\ldots,\mu_n}_{m,\ldots,m}(x_1^{\mu_1}\ldots x_n^{\mu_n}).$$

We get

$$\frac{\partial}{\partial m} J^{\mu_1,\ldots,\mu_n}_{m,\ldots,m}(x_1^{\mu_1}\ldots x_n^{\mu_n}) - n\,\gamma\, J^{\mu_1,\ldots,\mu_n}_{m,\ldots,m}(x_1^{\mu_1}\ldots x_n^{\mu_n}) = \frac{1}{(x_1\ldots x_n)^m}\int_0^{x_1}\ldots\int_0^{x_n}\left[\log\left(1-\frac{u_1}{x_1}\right)\ldots\left(1-\frac{u_n}{x_n}\right)\right] (u_1\ldots u_n)^{m-1}\, J^{\mu_1,\ldots,\mu_n}_{m-1,\ldots,m-1}(u_1^{\mu_1}\ldots u_n^{\mu_n})\,du_1\ldots du_n.$$

Now it is easy to see that

$$\int_0^{x_2}\ldots\int_0^{x_n}(u_1\ldots u_n)^{m-1}\, J^{\mu_1,\ldots,\mu_n}_{m-1,\ldots,m-1}(u_1^{\mu_1}\ldots u_n^{\mu_n})\,du_2\ldots du_n = x_1^{m-1}(x_2\ldots x_n)^m\, J^{\mu_1,\ldots,\mu_n}_{m-1,m,\ldots,m}(x_1^{\mu_1}\ldots x_n^{\mu_n}).$$

We then have to calculate $n$ integrals of the form

$$\int_0^{x_1}\log\left(1-\frac{u_1}{x_1}\right)u_1^{m-1}\, J^{\mu_1,\ldots,\mu_n}_{m-1,m,\ldots,m}(u_1^{\mu_1}\, x_2^{\mu_2}\ldots x_n^{\mu_n})\,du_1.$$

Putting $\left(\frac{u_1}{x_1}\right)^{\mu} = t$, we finally have the relation

$$\frac{\partial}{\partial m} J^{\mu_1,\ldots,\mu_n}_{m,\ldots,m}(x) - n\,\gamma\, J^{\mu_1,\ldots,\mu_n}_{m,\ldots,m}(x)$$

$$= \sum_{\gamma=1}^{n} \frac{1}{\mu_\gamma} \int_0^1 \log(1 - t^{1/\mu_\gamma})\, t^{\frac{m}{\mu_\gamma}-1} J^{\mu_1,\ldots,\mu_n}_{m-1,\,m,\ldots,m}(tx)\, dt. \quad (34$$

Starting with the operational relation (28) and using (29) we can get an analogous result on following the same method as used above. We have the following relation if

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_k = m, \text{ with } \lambda_i \neq m, \text{ if } k+1 \leqslant i \leqslant n :$$

$$\frac{\partial}{\partial m} J^{\mu_1,\ldots,\mu_n}_{m,\ldots,m,\,\lambda_{k+1},\ldots,\lambda_n}(x) - \gamma\, K\, J^{\mu_1,\ldots,\mu_n}_{m,\ldots,m,\,\lambda_{k+1},\ldots,\lambda_n}(x)$$

$$= \sum_{\gamma=1}^{k} \frac{1}{\mu_\gamma} \int_0^1 \log(1 - t^{\frac{1}{\mu_\gamma}})\, t^{\frac{m-\mu_\gamma}{\mu_\gamma}} J^{\mu_1,\ldots,\mu_n}_{m-1,\,m,\ldots,m,\,\lambda_{k+1},\ldots,\lambda_n}(xt)\, dt. \quad (35)$$

I take this opportunity to thank Dr. A. Sharma for his constant help and guidance during the preparation of this paper.

Remarks : Prof. Carl Herz has kindly pointed out that these results are analogous to these of Cailler (Mem. Soc. Phys... Geneve, 34. 1092-05. p. 292-368. The original paper of Cailler has not been available to me, but Prof. P. Delerue kindly informs me that Cailler has considered mostly the case $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_n = 1$.

If $\mu_1 = \frac{p_1}{q_1}$, $\ldots$, $\mu_n = \frac{p_n}{q_n}$, where $p_i$ and $q_i$ are positive integers prime to each other, we can still obtain the differential equation for $y = J^{\mu_1,\ldots,\mu_n}_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}(x)$.

Put $Q = q_1 q_2 \cdots q_n$.

and let

$$O^{\mu_i Q}_{\lambda_i} = x^{-\frac{\lambda_i}{\mu_i}} \left(\mu_i x^{1-\frac{1}{\mu_i}} \frac{d}{dx}\right)^{\mu_i Q} x^{\frac{\lambda_i + \mu_i Q}{\mu_i}}$$

denote an operator. Then the differential equation required is

$$O^{\mu_n Q}_{\lambda_n} \ldots O^{\mu_1 Q}_{\lambda_1} \frac{d^Q y}{dx^Q} = (-1)^Q y$$

Obviously the aperators $O_{\lambda_i}^{\mu_i\, Q}$ are commutative.

We can also give antoher integral representation, viz.

$$J_{\lambda_1,\ldots,\lambda_n}^{\mu_1,\ldots,\mu_n}(x)$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{-\infty}^{(0+)}\cdots\int_{-\infty}^{(0+)} t_1^{-\lambda_1-1}\ldots t_n^{-\lambda_n-1} e^{t_1+\ldots+t_n-\frac{-x}{t_1^{\mu_1}t_2^{\mu_2}\ldots t_n^{\mu_n}}}\, dt_1,\ldots dt_n$$

Also we have the generating function

$$e^{t_1+\ldots+t_n-\frac{-x}{t_1^{\mu_1}\ldots t_n^{\mu_n}}} = \sum_{m_1=-\infty}^{\infty}\ldots\sum_{m_n=-\infty}^{\infty} t_1^{m_1}\ldots t_n^{m_n} J_{m_1,\ldots,m_n}^{\mu_1,\ldots,\mu_n}(x).$$

## REFERENCES


[1] Wright, E. M., Asymptotic Partition Formulae III. — Partitions into $k^{th}$ Powers, *Acta. Math.*, 63, 1934, 143-191.

[2] Bernstein, V., Généralisation et conséquences d'un théorème de Le Roy-Lindelöf, *Bull. Sci. Math.*, 52, 1928, 420-436.

[3] Srivastava, H. M., Ph. D. thesis, University of Lucknow, 1954.

[4] Wright, E. M., The Asymptotic Expansion of the Generalised Hypergeometric function, *Proc. Lond. Math. Soc.*, 46, 1940, 390-408.

[5] Wright, E. M., The asymptotic Expansion of the Generalised Hypergeometric function, *Jour. Lond. Math. Soc.*, 10, 1935, 286-293.

[6] McLachlan (N. W.) et Humbert (P.), Formulaire pour le Calcul symbolique, *Mém. Sci. Math.*, C, 1950.

[7] Delerue, P., Sur le calcul symbolique à *n* variables et les fonctions hyperbesséliennes. *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles*. Tome LXVII 1953 p. 83-105 et p. 229-274.

# Théorie limite du flambage d'une plaque circulaire chauffée en son centre. — Déformées caractéristiques

PAR

F. BUCKENS

Sommaire

Nous avons déterminé précédemment [5] les valeurs critiques de la température du chauffage local au centre d'une plaque circulaire, valeurs pour lesquelles se produit le début de l'instabilité élastique sous l'action de la dilatation thermique. — Nous continuerons à nous limiter aux déformées à symétrie circulaire, dans l'hypothèse où le rayon $r_o$ de la zone chauffée est très petit par rapport au rayon R de la plaque.

Nous avons vu que les conditions de contrainte à la périphérie (encastrement, appui simple) n'ont alors qu'une faible influence sur les valeurs et les déformées caractéristiques.

Le spectre des températures critiques, pour $|\log \rho|^{-1} = \left| \log \frac{r_o}{R} \right|^{-1} \ll 1$ est donné par la formule :

$$T_s = \frac{(h/r_o)^2 \lambda_s}{6 \alpha (1 - \nu^2)} \tag{30}$$

où l'on a posé :

$$\lambda_s = 1 + s^2 \pi^2 / \log^2 \rho \tag{31}$$

pour $s = 1, 2, \ldots, h$ étant l'épaisseur, et $\alpha$ le coefficient de dilatation. La formule (31) est valable tant que $|s^2\pi^2/\log^2\rho| \ll 1$.

On voit facilement que lorsque le rayon de la plaque tend vers l'infini ($|\log \rho| \to \infty$), le spectre (30) devient continu à partir de la valeur minimum :

$$T_o = \frac{(h/r_o)^2}{6 \alpha (1 - \nu^2)}$$

Les gradients des déformées caractéristiques, $\varphi = \frac{dw}{dr}$, sont donnés par la formule (14), qui se réduit, au voisinage du centre de la plaque, à :

$$\varphi \cong \sin\left(s\,\pi \log \frac{r_o}{r} \Big/ \log \rho\right) \qquad (32)$$

d'où :

$$w \cong \frac{r}{2\,r_o}\left[\sin\left(s\,\pi \log \frac{r_o}{r} \Big/ \log \rho\right) + \cos\left(s\,\pi \log \frac{r_o}{r} \Big/ \log \rho\right) - (-1)^s\right] \qquad (33)$$

le déplacement transversal $w$ diminuant rapidement à une certaine distance du centre de la plaque, lorsque $\rho$ est très petit.

## 6. Relaxation des tensions par déformation

En réalité, les expressions (14) ou (32) des déformées caractéristiques ne sont strictement valables qu'au sens virtuel; en effet, à l'encontre de ce qui se passe lorsque le voilement est dû à des forces extérieures, il se produit une *relaxation* des tensions, qui, d'abord très lente, va en s'accentuant à mesure que la plaque se déforme.

En fait, on peut résumer la situation de la manière suivante. Dès que la température au centre atteint la valeur $T_1$, la déformation se produit d'abord rapidement, puis plus lentement comme nous le verrons plus loin. — Le second palier d'instabilité ne se produirait à la température $T_2$ que si l'on empêchait la première déformée de se manifester. —

De façon générale, la déformée d'ordre $n$ ne s'introduirait à la température critique $T_n$ que si les déformées d'ordres inférieurs étaient maintenues à zéro.

Il s'agit ici d'un phénomène de non-linéarité typique, analogue à celui qu'on observe en étudiant la flèche de flambement d'une poutre en fonction du raccourcissement de la corde. (Un problème semblable est celui d'une poutre chauffée, dont les extrémités sont maintenues à une distance constante).

## 7. Etablissement de l'équation non linéaire

En éliminant le déplacement radial $u$ entre les expressions des

déformations radiale $\varepsilon_r$ et tangentielle $\varepsilon_t$ :

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} + \frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dr}\right)^2$$

$$\varepsilon_t = \frac{u}{r}$$

on obtient :

$$\frac{d}{dr}(r\varepsilon_t) - \varepsilon_r + \frac{1}{2}\varphi^2 = 0 \qquad (34)$$

Nous savons par ailleurs [6] que la répartition des tensions dues à une dilatation thermique s'obtient en superposant deux états de tension, la première $(N'_r, N'_t)$ due à des forces de masse proportionnelles au gradient de T, se réduisant ici à $-\frac{\alpha E h}{1-\nu}\frac{dT}{dr}$, combinées à une force normale centrifuge, à la périphérie, d'expression $\frac{\alpha E h T}{1-\nu}$, ici zéro, la seconde donnée par $N''_r = N''_t = -\frac{\alpha E h T}{1-\nu}$.

On a alors $N_r = N'_r + N''_r$ et $N_t = N'_t + N''_t$.

Substituons dans la relation (34) les expressions des déformations en fonction des tensions radiale $N'_r$ et tangentielle $N'_t$ :

$$\varepsilon'_r = \frac{1}{hE}(N'_r - \nu N'_t) \qquad \varepsilon'_t = \frac{1}{hE}(N'_t - \nu N'_r)$$

et éliminons $N'_t$ en tenant compte de la relation d'équilibre dans le premier état de tension

$$\frac{dN'_r}{dr} + \frac{N'_r - N'_t}{r} - \frac{\alpha E h}{1-\nu}\cdot\frac{dT}{dr} = 0 \qquad (35)$$

Il vient :

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r^2 N'_r)\right] = \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha E h\frac{dT}{dr} + \frac{\alpha E h}{1-\nu}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) - \frac{Eh}{2r}\varphi^2 \qquad (36)$$

et par intégrations successives :

$$N'_r = \alpha Eh\left[\frac{T}{1-\nu} - \frac{1}{r^2}\int_0^r Tr\,dr\right] - \frac{Eh}{2r^2}\int_0^r r\left(\int_0^r \frac{\varphi^2}{r}dr\right)dr + \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{r^2} \qquad (37)$$

L'absence de tension infinie au centre implique $C_2 = 0$, et la condition de libre dilatabilité à la périphérie, $N' = 0$ pour $r = R$, détermine $C_1$. On trouve enfin :

$$N_r = N'_r - \frac{\alpha E h T}{1-\nu} = \alpha E h \left[ \frac{1}{R^2} \int_0^R Tr\, dr - \frac{1}{r^2} \int_0^r Tr\, dr \right]$$

$$+ \frac{Eh}{2} \left[ \frac{1}{R^2} \int_0^R r \left( \int_0^r \frac{\varphi^2}{r} dr \right) dr - \frac{1}{r^2} \int_0^r r \left( \int_0^r \frac{\varphi^2}{r} dr \right) dr \right] \quad (38)$$

L'équation en $\varphi$ à résoudre, s'obtient en substituant cette expression de $N_r$ dans :

$$\varphi'' + \frac{1}{r}\varphi' - \frac{1}{r^2}\varphi = \frac{N_r}{D} \cdot \varphi \quad (39)$$

et l'on observera qu'elle apparaît sous une forme non seulement non-linéaire, mais encore intégro-différentielle.

Le problème posé ici par les conditions (4) sur T, c.à.d.

$$T = 0 \text{ pour } r > r_o, \text{ et } \int_0^{r_o} Tr\, dr = \frac{D\lambda}{Eh}$$

donne, en admettant

$$\varphi = 0$$

pour $r \leqslant r_o$, et en posant :

$$I(r) = \frac{1}{r^2} \int_{r_o}^r r \left( \int_{r_o}^r \frac{\varphi^2}{r} dr \right) dr$$

$$\varphi'' + \frac{1}{r}\varphi' - \left( \frac{\lambda}{R^2} + \frac{1-\lambda}{r^2} \right) \varphi = \frac{6(1-\nu^2)}{h^2} [I(R) - I(r)]\varphi \quad (40)$$

Admettons pour simplifier, étant donné l'importance minime des conditions de contrainte à la périphérie, celle de l'encastrement : $\varphi = 0$ pour $r = R$. — Dans ces conditions, en nous inspirant de l'expression (32) nous pouvons toujours écrire l'expression de $\varphi$ entre $r_o$ et R sous la forme d'une série de Fourier en adoptant une échelle logarithmique en $r$ :

$$\varphi = \sum_{q=1}^{\infty} a_q \sin \left( q\pi \log \frac{r_o}{r} \Big/ \log \rho \right) \quad (41)$$

et en posant

$$x = \log \frac{r_o}{r} \Big/ \log \rho$$

on a :

$$a_q = 2 \int_o^1 \varphi . \sin\,(q\,\pi\,x)\; dx. \qquad (42)$$

Substituons l'expression (41) dans l'équation (40).

On a tout d'abord :

$$\int_{r_o}^{r} \frac{\varphi^2}{r}\, dr = -\frac{\log \rho}{2}\left[\sum_{q=1}^{\infty} a_q^2 \left(x - \frac{\sin 2\pi qx}{2q\pi}\right)\right]$$

$$+ \sum_{q \neq p}^{\infty} \frac{a_p\, a_q}{\pi}\left(\frac{\sin\,(p-q)\,\pi x}{p-q} - \frac{\sin\,(p+q)\,\pi x}{p+q}\right) \qquad (43)$$

$$= \frac{\log^{-1}\rho}{8}\left\{\sum_{q=1}^{\infty} a_q^2 \left[1 - 2\log\frac{r}{r_o} - \frac{r_o^2}{r^2}\right.\right.$$

$$\left. - \frac{\log\rho \sin\left(2q\pi \log\frac{r_o}{r} \Big/ \log\rho\right) + q\pi\cos\left(2q\pi\log\frac{r_o}{r}\Big/\log\rho\right)}{q\pi\,\lambda_q}\right]$$

$$a_p\, a_q \left[\frac{2\log\rho\sin\left((p-q)\pi\log\frac{r_o}{r}\Big/\log\rho\right) + (p-q)\pi\cos\left((p-q)\pi\log\frac{r_o}{r}\Big/\log\rho\right)}{(p-q)\,\pi\,\lambda_{\frac{p-q}{2}}}\right.$$

$$\left.\left. \frac{\log\rho\sin\left((p+q)\pi\log\frac{r_o}{r}\Big/\log\rho\right) + (p+q)\pi\cos\left((p+q)\pi\log\frac{r_o}{r}\Big/\log\rho\right)}{(p+q)\pi\,\lambda_{\frac{p+q}{2}}}\right]\right\} \qquad (44)$$

$$-I(r) = \frac{1}{8}\left\{\sum_{q=1}^{\infty} a_q^2\left[2(1-x) + \frac{\sin(2q\pi x) + \frac{q\pi}{\log\rho}\cos(2q\pi x)}{q\pi\,\lambda_q} - \frac{1}{\log\rho} + \rho^{2x} - \rho^2\right]\right.$$

$$- \sum_{q\neq p}^{\infty} a_p\, a_q\left[\frac{2\sin\left((p-q)\pi x\right) + \frac{(p-q)\pi}{\log\rho}\cos\left((p-q)\pi x\right)}{\pi\,(p-q)\lambda_{\frac{p-q}{2}}}\right.$$

$$\left.\left. - \frac{2\sin\left((p+q)\pi x\right) + \frac{(p+q)\pi}{\log\rho}\cos\left((p+q)\pi x\right)}{\pi(p+q)\lambda_{\frac{p+q}{2}}}\right]\right\} \qquad (45)$$

La substitution de (41) dans (40) donne alors

$$\sum_{q=1}^{\infty} \frac{\lambda - \lambda_q}{r_o^2} a_q \rho^{2x} \sin(q\pi x) - \frac{\lambda}{R^2} \sum_{p=1}^{\infty} a_p \sin(p\pi x)$$

$$= \frac{6(1-\nu^2)}{h^2} [I(R) - I(r)] \Sigma a_q \sin(q\pi x).$$

La mise en série de Fourier du premier terme nous conduit à poser :

$$\rho^{2x} \sin(q\pi x) = \sum_{p=1}^{\infty} b_{qp} \sin(p\pi x)$$

ce qui donne :

$$b_{qp} = 2\int_o^1 \rho^{2x} \sin(q\pi x) \sin(p\pi x)\, dx = \frac{-2pq\pi^2}{\log^3 \rho \cdot \lambda_{\frac{p-q}{2}} \cdot \lambda_{\frac{p+q}{2}}}$$

en nous servant de la notation (31).

Pour le second membre, si nous posons :

$$x \sin(q\pi x) = \sum_p c_{qp} \sin(p\pi x)$$

nous trouvons :

$$c_{qp} = \frac{[(-1)^{p+q} - 1]\, 4pq}{(p^2 - q^2)^2 \pi^2} \quad (p \neq q); \quad c_{pp} = \frac{1}{2},$$

et en écrivant :

$$\sin(k\pi x) \sin(q\pi x) = \sum_p d_{kqp} \sin(p\pi x)$$

nous avons :

$$d_{kqp} = [1 - (-1)^{p+q+k}] \frac{4pqk}{p^4 + q^4 + k^4 - 2(p^2q^2 + q^2k^2 + k^2p^2)}$$

et par ailleurs :

$$\cos(k\pi x) \cdot \sin(q\pi x) = \frac{1}{2} \sin(q-k)\pi x + \frac{1}{2} \sin(q+k)\pi x.$$

Les différents termes de (46) peuvent être ainsi développés suivant des séries de Fourier en sin $(p\,\pi x)$.

On en déduit un système infini d'équations, non-linéaires pour les

coefficients $a_p$, et correspondant aux différentes harmoniques des séries.

Nous allons nous limiter ici au premier terme du développement et poser :

$$\varphi \cong a_1 \sin\left(\pi \log \frac{r_o}{r} \Big/ \log \rho\right) \tag{46}$$

en négligeant, dans la première équation obtenue par la décomposition de (40) en série de Fourier, les autres coefficients $a_2$, $a_3$ etc... Cette démarche se justifie, puisque comme nous l'avons vu, l'expression (14) de [5] se réduit à (32), avec une erreur de l'ordre de $\rho^2 = \dfrac{r_o^2}{R^2} \ll 1$ au voisinage de l'origine, là où précisément les tensions et déformations sont les plus sensibles.

Nous trouvons ainsi :

$$\frac{-\lambda_1}{r_o^2} a_1 \frac{2\pi^2}{\log^3 \rho . \lambda_1} - \frac{\lambda}{R^2} a_1 = \frac{3(1-\nu^2)}{4h^2} a_1^3 \left(1 - \frac{3}{2 \log \rho . \lambda_1} - \frac{2\pi^2}{\log^3 \rho . \lambda_1} - \rho^2\right) \tag{47}$$

d'où, en notant que $\rho^2 \ll \log^{-v} \rho$ pour $\rho \ll 1$ quel que soit l'entier $v$, :

$$a_1 \cong \frac{2h\pi}{r_o} \sqrt{\frac{2(\lambda - \lambda_1)}{3(1-\nu^2)(-\log \rho)^3}} = 4\pi \sqrt{\frac{\alpha(T - T_1)}{(-\log \rho)^3}} \tag{48}$$

$T_1$ étant donné par :

$$T_1 = \frac{(h/r_o)^2 (1 + \pi^2/\log^2 \rho)}{6\alpha (1-\nu^2)}$$

## BIBLIOGRAPHIE


[5] *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, Tome LXVIII, I — p. 63. (Entre autres corrections, lire à la formule (22) : $r/R \cong \rho^{(2q-1)/2s}$ et à la formule (24) : $r/R \cong \rho^{1-(q-1)/s}$, et remplacer au second membre de (1) le signe de soustraction par celui de multiplication).

[6] S. TIMOSHENKO « Théorie de l'Elasticité » Trad. Béranger, 1936 — p. 391 et « Theory of Plates and Shells », Mc Graw-Hill, 1940 p. 329.

Deuxième Section

—

# Sciences Physiques et Chimiques

M. Ch. Manneback fait un exposé sur les règles des sommes et d'alternance de fréquences dans les spectres de vibration des molécules polyatomiques isotopes. Le texte de cette note paraîtra prochainement dans les *Annales*.

# Au sujet de certaines images consécutives

PAR

A. BIOT

*Résumé.* — On remarque que certaines images dites consécutives représentent en fait un état d'adaptation de l'œil. On suggère en conséquence l'exécution de mesures photométriques sur ces images. Les résultats obtenus devront représenter la mesure de l'état d'adaptation de l'œil au moment de chaque expérience.

**1.** Nous voudrions insister ici sur quelques-unes des remarques que nous avons faites dans un travail (1) qui a été présenté au récent colloque de Florence relatif à diverses questions actuellement à l'ordre du jour en optique. Nous nous sommes, dans ce travail, servi des remarques en question dans le but d'apporter des éléments d'explication à un phénomène assez étrange, observé autrefois puis oublié, puis récemment retrouvé. L'intérêt de ces remarques dépasse toutefois de beaucoup, pensons-nous, celui de leur utilisation dans ce cas particulier et nous voudrions le montrer ici.

**2.** Il est bien connu que notre œil, parmi ses nombreuses possibilités, possède celle de *s'adapter* au niveau de chaque éclairage où il peut être plongé. Cela veut dire qu'à chaque niveau d'éclairage il se trouve dans un *état* déterminé et que quand il passe d'un niveau d'éclairage à un autre il se *transforme* pour passer d'un état à un autre. Est-il

(1) A. Biot. Remarques sur un phénomène observé par M. G. Toraldo di Francia.

(2) W. D. Wright. Researches on normal and defective colour vision. London, H. Kimpton, 1946.

possible de caractériser un état déterminé d'un œil ? Des recherches importantes dans ce sens ont été faites par W. D. Wright (2) qui, très ingénieusement, compare ce qui se passe dans l'œil étudié (l'œil droit, par exemple) à ce qui se passe dans l'autre (l'œil gauche du même sujet).

Il nous a semblé que certaines images consécutives (on dit aussi accidentelles) pouvaient nous servir à « mesurer » l'état d'adaptation d'un œil sans se servir de l'autre.

**3.** Considérons une surface placée à quelque distance de l'œil et vue sous un angle solide assez grand. Supposons que, convenablement éclairée, cette surface nous apparaisse sous une luminence uniforme. Plaçons entre l'œil et la surface un écran opaque qui le masque entièrement. Perçons dans cet écran, vers son centre, un trou de petites dimensions (3 mm o par exemple) et regardons ce trou avec une loupe ($G = 6 \times$ par exemple). Le trou nous paraît uniformément éclairé. Poursuivons l'expérience pendant un certain temps $t$ connu. Nous observons nettement que la luminence apparente de l'image diminue : notre œil s'est modifié là où la rétine est éclairée. Une transformation inverse s'est évidemment produite pour les endroits de la rétine non éclairée. Enlevons brusquement l'écran opaque. Nous voyons se projeter, sur le fond uniforme clair une « image consécutive » sombre du trou.

L'expérience suivante montre que l'abaissement de brillance observé dans l'image consécutive varie avec le niveau d'éclairage auquel l'œil est soumis : avant de faire l'observation décrite au paragraphe précédent recouvrons le trou d'un filtre neutre dégradé. L'image consécutive observée nous apparaît dégradée en sens inverse.

Les remarques qui précèdent nous conduisent à faire l'expérience suivante : réalisons d'abord la première expérience décrite ci-dessus puis, au moment où nous enlevons l'écran abaissons la luminence du champ qui entoure l'image consécutive jusqu'à ce que tout le champ de vision apparaisse de luminence uniforme. L'abaissement de luminence réalisé « mesure » l'état d'adaptation de l'œil dans les conditions de l'expérience.

**4.** Il y a des difficultés.

a. Il faut faire la mesure proposée rapidement après que l'on a enlevé l'écran opaque car l'œil modifie immédiatement, dès que les conditions changent, l'état d'adaptation dans lequel il se trouvait

et que nous désirons mesurer. Le problème est une question d'outillage instrumental et d'essais qui ne paraît pas insoluble.

b. On sait que les images consécutives jouissent de la curieuse propriété de disparaître brusquement puis de réapparaître, chaque fois affaiblies un peu plus, un certain nombre de fois et cela d'une manière qui dépend très peu de la volonté de l'observateur. Nouvelle raison d'effectuer rapidement la mesure. Mais possibilité probable de faire plusieurs mesures renseignant sur le mode d'affaiblissement des images.

Par ailleurs, la persistance des images consécutives indique que l'œil ne revient à son état initial qu'après un certain temps, qu'il faut laisser écouler avant de pouvoir recommencer une nouvelle série de mesures dans le genre de celles qui viennent d'être décrites.

c. Il convient évidemment de préciser les conditions initiales d'adaptation de l'œil. Des indications sur ce point ne pourraient probablement être données qu'après des expériences préliminaires.

d. Il est probable que les recherches proposées ici ne sont pas très faciles à exécuter. Il semble bien cependant qu'elles valent la peine d'être entreprises car elles permettent une mesure *directe* de l'état d'adaptation de l'œil.

**5.** Les images consécutives ont fait l'objet, depuis leur découverte déjà lointaine, de nombreuses publications tant en raison des curieux aspects qu'elles présentent parfois que de leur explication. Nous n'avons pu, bien entendu, consulter toutes ces publications. Il nous semble cependant que notre proposition constitue un premier essai d'utiliser les images en question dans un but de recherche. (1)

Remarquons pour finir que l'expression « image consécutive » appliquée au phénomène que nous utilisons ici semble, en un certain sens, assez peu approprié. En effet, l'expérience que nous décrivons plus haut (la première) montre que l'image existe déjà avant que nous enlevions l'écran opaque et qu'il puisse être question d'image consécutive. En enlevant l'écran nous ne changeons rien à l'image mais seulement à son environnement. Il est clair aussi que l'expression « image accidentelle », parfois employée, est encore moins adéquate que la précédente.

---

(1) du genre indiqué ici.

# Tables pour le calcul des doublets minces collés, corrigés de l'aberration sphérique

PAR

A. BIOT

SOMMAIRE. — On donne dans une première table les inverses $\rho_2$ du rayon de collage pour les valeurs de $\varphi_1$ égales à $\varphi_1$ limite, 3, 4, 5, 6 et pour les valeurs de $\varpi$ ($\varpi_1$) (proximité du point objet) égales à — 2, — 3/2, 1, 1/2, 0, + 1/2 et + 1, la distance focale du doublet étant égale à 1. Les valeurs de $n_1$ et $n_2$ choisies pour les indices sont 1.50, 1.54, 1.58, 1.62 et 1.66.

Une deuxième table donne les valeurs de la deuxième proximité $\varpi_2$ pour laquelle les doublets calculés sont corrigés.

On remarque que ces tableaux permettent de calculer rapidement le coefficient $a_2$ d'aberration sphérique relatif à chaque doublet pour $\varpi$ quelconque.

**1.** *Notations et formules.* Les numérotations ayant lieu dans le sens de propagation de la lumière, nous appelons :

$\rho_1$, $\rho_2$, $\rho_3$ les inverses des rayons de courbure;

$n_1$, $n_2$ les indices de réfraction;

$\varphi_1$, $\varphi_2$ les inverses des distances focales des deux lentilles;

$\varpi$ la proximité d'un point objet quelconque;

$\varpi_1$, $\varpi_2$ les deux racines de l'équation en $\varpi$;

Nous écrivons encore :

$$A = 1 + 2\left(\frac{\varphi_1}{n_1} + \frac{\varphi_2}{n_2}\right)$$

$$B = \frac{2n_1 + 1}{n_1 - 1}\,\varphi_1^2 - \frac{2n_2 + 1}{n_2 - 1}\,\varphi_2^2$$

$$C = \frac{n_1^2}{(n_1 - 1)^2}\,\varphi_1^3 - \frac{n_2^2}{(n_2 - 1)^2}\,\varphi_2^3$$

$$D = \frac{n}{n_1 - 1}\,\varphi_1^2 - \frac{n_2}{n_2 - 1}\,\varphi_2^2$$

Rappelons encore que $\varphi_1$ et $\varphi_2$ sont ici des quantités connues que l'on peut, par exemple, avoir déterminées par une condition d'achromatisme après avoir choisi les verres utilisés.

Dans ces conditions on trouve pour $\rho_2$, en appliquant l'équation classique de suppression de l'aberration sphérique et en supposant égale à l'unité la distance focale du doublet :

$$(1) \quad \rho_2 = \frac{1}{2A}\left[-B + 2\varphi_1(A+1) - 2\varpi(A+1) \pm \sqrt{B^2 - 4Ac + 4\varphi_1(AD-B) + 4\varphi_1^2 + 8\varphi_1\varpi + 4\varpi(AD-B) + 4\varpi^2}\right]$$

**2.** La relation (1) a fourni les valeurs de $\rho_2$ que l'on trouve dans le tableau I. Les calculs ont été faits pour $n_1 = 1.50$, 1.54, 1.58, 1.62 et pour $n_2 = 1.54$, 1.58, 1.62 et 1.66, ainsi que pour $\varpi = -2$, $-3/2$, $-1$, $-1/2$, 0, $+1/2$ et $+1$, de même que pour $\varphi_1 = \varphi_1$ limite (c'est la valeur de $\varphi_1$ qui annule le discriminant de (1) — on donne chaque fois la valeur de $\varphi_1$ limite), 3, 4, 5 et 6. On notera que les valeurs trouvées pour $\varpi = -1$, correspondent aux valeurs « flint avant » (correction pour l'infini) de la littérature. Les valeurs $\rho_2$ de la table sont à prendre avec le signe —. Les valeurs de $\rho_2$ qui correspondent à des valeurs de $\varphi_1$, $n_1$ et $n_2$, $\varpi$ comprises entre celles qui ont servi à établir les tables s'obtiendront par interpolation (Voir p. ex. : H. Chrétien, Cours de Calcul des Combinaisons optiques).

**3.** Si, dans l'équation qui donne $\rho_2$ on remplace $n_1$, $n_2$, $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\rho_2$ par des valeurs numériques, on obtient une équation du second degré en $\varpi$. Les deux racines $\varpi_1$ et $\varpi_2$ de cette équation satisfont à la relation :

$$(2) \quad \varpi_1 + \varpi_2 = 2(\rho_2 - \varphi_1) + \frac{B + D - 2\rho_2}{A + 2}$$

Si l'on introduit dans cette relation les valeurs correspondantes de $n_1$ et $n_2$, $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\rho_2$ et $\varpi(\varpi_1)$ du tableau I, on peut en déduire les valeurs $\varpi_2$ qui correspondent, dans les conditions du calcul, aux valeurs $\varpi$ ($\varpi_1$) que l'on y a utilisées. Les valeurs $\varpi_2$ ainsi trouvées sont données dans le tableau II.

**4.** On sait que, pour un doublet quelconque corrigé de l'aberration sphérique pour les proximités $\varpi_1$ et $\varpi_2$ le coefficient $a_2$ de l'aberration sphérique qui correspond à une proximité quelconque $\varpi$ est donné par la relation

(3) $$a_2 = \alpha(A + 2)\ (\varpi - \varpi_1)\ (\varpi - \varpi_2).$$

où $\alpha$ est connu.

Le tableau III donne les valeurs de $(A + 2)$ qui correspondent aux objectifs des tableaux I et II. Les nombres des tableaux I, II et III permettent donc de calculer, pour $\varpi$ quelconque, la valeur de $a_2$ de tout doublet corrigeable de l'aberration sphérique pour une proximité $\varpi_1$ déterminée.

TABLEAU IIIa

Valeurs de A + 2.

| $n_1$ | $\varphi_1$ \ $n_2$ | 1.54 | 1.58 | 1.62 | 1.66 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1.50 | 3 | 4.402597 | 4.468355 | 4.530864 | 4.590362 |
| | 4 | 4.437229 | 4.535866 | 4.629629 | 4.718876 |
| | 5 | 4.471861 | 4.603376 | 4.728395 | 4.847390 |
| | 6 | 4.506493 | 4.670887 | 4.827160 | 4.975904 |
| 1.54 | 3 | 4.364459 | 4.426968 | 4.486466 | |
| | 4 | 4.397338 | 4.491102 | 4.580348 | |
| | 5 | 4.430217 | 4.555235 | 4.674230 | |
| | 6 | 4.463095 | 4.619368 | 4.768112 | |
| 1.58 | 3 | 4.328332 | 4.387829 | | |
| | 4 | 4.359586 | 4.448833 | | |
| | 5 | 4.390841 | 4.509836 | | |
| | 6 | 4.422096 | 4.570840 | | |
| 1.62 | 3 | 4.294066 | | | |
| | 4 | 4.323814 | | | |
| | 5 | 4.353563 | | | |
| | 6 | 4.383312 | | | |

TABLEAU I Valeurs de $-\rho_2$

| $n_1$ \ $n_2$ | | 1.54 | | | | | | | 1,58 | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\varphi_1$ \ $\varphi_2$ | — 2 | — 3/2 | — 1 | — 1/2 | 0 | + 1/2 | + 1 | — 2 | — 3/2 | — 1 | — 1/2 | 0 | + 1/2 | + 1 |
| 1.50 | (lim) | (2.3874) | (2.5381) | (2.6024) | (2.6042) | (2.5493) | (2.4315) | (2.2261) | (2.1304) | (2.2377) | (2.2787) | (2.2718) | (2.2207) | (2.1209) | (1.9530) |
| | lim | 5.9701 | 5.5790 | 5.0064 | 4.3010 | 3.4744 | 2.5139 | 1.3689 | 5.4478 | 4.9712 | 4.3533 | 3.6316 | 2.8136 | 1.8898 | 0.8202 |
| | 3 | 6.2999 | 5.6758 | 5.0081 | 4.2906 | 3.5193 | 2.7193 | 1.8837 | 5.9008 | 5.2282 | 4.5275 | 3.7983 | 3.0423 | 2.2621 | 1.4612 |
| | | 8.2562 | 7.4642 | 6.7157 | 6.0169 | 5.3663 | 4.7558 | 4.1751 | 8.8352 | 8.1026 | 7.3983 | 6.7223 | 6.0732 | 5.4482 | 4.8440 |
| | 4 | 7.4694 | 6.7866 | 6.0829 | 5.3582 | 4.6131 | 3.8488 | 3.0667 | 6.9313 | 6.2258 | 5.5065 | 4.7737 | 4.0279 | 3.2698 | 2.5001 |
| | | 11.5076 | 10.7800 | 10.0734 | 9.3878 | 8.7226 | 8.0766 | 7.4484 | 12.5117 | 11.8229 | 11.1478 | 10.4863 | 9.8377 | 9.2015 | 8.5768 |
| | 5 | 8.6575 | 7.9553 | 7.2402 | 6.5121 | 5.7715 | 5.0188 | 4.2544 | 7.9625 | 7.2441 | 6.5175 | 5.7825 | 5.0397 | 4.2891 | 3.5312 |
| | | 14.9199 | 14.2174 | 13.5281 | 12.8516 | 12.1876 | 11.5358 | 10.8956 | 16.4754 | 15.8097 | 15.1523 | 14.5030 | 13.8618 | 13.2282 | 12.6020 |
| | 6 | 9.8481 | 9.1133 | 8.3921 | 7.6620 | 6.9231 | 8.1758 | 5.4202 | 8.9748 | 8.2498 | 7.5190 | 6.7828 | 6.0412 | 5.2943 | 4.5423 |
| | | 18.5246 | 17.8378 | 17.1600 | 16.4912 | 15.8310 | 15.1795 | 14.5360 | 20.7241 | 20.0748 | 19.4311 | 18.7930 | 18.1602 | 17.5326 | 16.9102 |
| 1,54 | (lim) | | | | | | | | (2.4200) | (2.6057) | (2.6832) | (2.6862) | (2.6223) | (2.4834) | (2.2345) |
| | lim | | | | | | | | 5.7508 | 5.3999 | 4.8396 | 4.1331 | 3.2947 | 2.3090 | 1.1098 |
| | 3 | | | | | | | | 6.0342 | 5.4278 | 4.7712 | 4.0525 | 3.2735 | 2.4478 | 1.5910 |
| | | | | | | | | | 7.7455 | 6.9289 | 6.1626 | 5.4584 | 4.8145 | 4.2172 | 3.6512 |
| | 4 | | | | | | | | 7.1209 | 6.4423 | 5.7392 | 5.0116 | 4.2601 | 3.4864 | 2.6926 |
| | | | | | | | | | 10.7105 | 9.9720 | 9.2579 | 8.5684 | 7.9028 | 7.2594 | 6.6360 |
| | 5 | | | | | | | | 8.2236 | 7.5243 | 6.8078 | 6.0762 | 5.3301 | 4.5701 | 3.7968 |
| | | | | | | | | | 13.8070 | 13.0989 | 12.4039 | 11.7240 | 11.0586 | 10.4071 | 9.7690 |
| | 6 | | | | | | | | 9.3049 | 8.5972 | 7.8737 | 7.1398 | 6.3958 | 5.6420 | 4.8788 |
| | | | | | | | | | 17.0785 | 16.3802 | 15.6977 | 15.0256 | 14.3636 | 13.7114 | 13.0687 |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 3 | 5.6684<br>9.1817 | 4.9767<br>8.4782 | 4.2629<br>7.7970 | 3.5273<br>7.1374 | 2.7715<br>6.4981 | 1.9972<br>5.8772 | 1.2066<br>5.2727 |
| 1.50 | 4 | 6.6058<br>13.1434 | 5.8834<br>12.4855 | 5.1613<br>11.8273 | 4.4238<br>11.1853 | 3.6757<br>10.5524 | 2.9186<br>9.9292 | 2.1526<br>9.3149 |
| | 5 | 7.5436<br>17.4566 | 6.8166<br>16.8171 | 6.0833<br>16.1838 | 5.3439<br>15.5567 | 4.5987<br>14.9354 | 3.8477<br>14.3199 | 3.0913<br>13.7098 |
| | 6 | 8.4668<br>22.0992 | 7.7345<br>21.4778 | 6.9982<br>20.8604 | 6.2579<br>20.2470 | 5.5137<br>19.6375 | 4.7659<br>19.0316 | 4.0143<br>18.4295 |
| | (lim) | (2.1605) | (2.2928) | (2.3429) | (2.3355) | (2.2767) | (2.1594) | (1.9569) |
| | lim | 5.2599 | 4.8134 | 4.2037 | 3.4792 | 2.6513 | 1.7063 | 0.5954 |
| | 3 | 5.6651<br>8.2581 | 4.9996<br>7.5116 | 4.3010<br>7.0041 | 3.5687<br>6.1184 | 2.8047<br>5.4704 | 2.0129<br>4.8501 | 1.1979<br>4.2531 |
| 1.54 | 4 | 6.6214<br>11.5933 | 5.9167<br>10.8971 | 5.1959<br>10.2165 | 4.4594<br>9.5516 | 3.7078<br>8.9017 | 2.9420<br>8.2661 | 2.1631<br>7.6436 |
| | 5 | 7.5766<br>15.1759 | 6.8570<br>14.5042 | 6.1276<br>13.8423 | 5.3886<br>13.1899 | 4.6404<br>12.5467 | 3.8834<br>11.9124 | 3.1179<br>11.2865 |
| | 6 | 8.5120<br>19.0051 | 7.7845<br>18.3508 | 7.0504<br>17.7031 | 6.3099<br>17.0618 | 5.5632<br>16.4268 | 4.8104<br>15.7979 | 4.0516<br>15.1744 |
| | (lim) | (2.4442) | (2.6710) | (2.7631) | (2.7675) | (2.6940) | (2.5322) | (2.2329) |
| | lim | 5.5483 | 5.2422 | 4.6944 | 3.9870 | 3.1372 | 2.1263 | 0.8679 |
| | 3 | 5.8013<br>7.3155 | 5.2163<br>6.4710 | 4.5756<br>5.6822 | 3.8565<br>4.9718 | 3.0606<br>4.3382 | 2.2117<br>3.7576 | 1.3324<br>3.2074 |
| 1.58 | 4 | 6.8183<br>10.0371 | 6.1416<br>9.2870 | 5.4428<br>8.5650 | 4.7124<br>7.8716 | 3.9544<br>7.2058 | 3.1709<br>6.5655 | 2.3652<br>5.9475 |
| | 5 | 7.8516<br>12.8716 | 7.1515<br>12.1534 | 6.4340<br>11.4527 | 5.6992<br>10.7692 | 4.9476<br>10.1026 | 4.1801<br>9.4518 | 3.3976<br>8.8160 |
| | 6 | 8.8646<br>15.8506 | 8.1512<br>15.1511 | 7.4251<br>14.4644 | 6.6881<br>13.7885 | 5.9388<br>13.1249 | 5.1787<br>12.4721 | 4.4077<br>11.8303 |
| | (lim) | (2.4591) | (2.7341) | (2.8522) | (2.8479) | (2.7645) | (2.5776) | (2.2204) |
| | lim | 5.3578 | 5.1019 | 4.5670 | 3.8583 | 2.9976 | 1.9619 | 0.6386) |
| | 3 | 5.5944<br>6.9503 | 5.0351<br>6.0737 | 4.4184<br>5.2545 | 3.7003<br>4.5367 | 2.8809<br>3.9202 | 2.0042<br>3.3610 | 1.1013<br>2.8280 |
| 1.62 | 4 | 6.5384<br>9.4419 | 5.7819<br>8.6811 | 5.1736<br>7.9522 | 4.4422<br>7.2562 | 3.6871<br>6.6063 | 2.8873<br>5.9567 | 2.0708<br>5.3459 |
| | 5 | 7.5241<br>12.0713 | 6.8259<br>11.3447 | 6.1017<br>10.6380 | 5.3697<br>9.9510 | 4.6127<br>9.2832 | 3.8375<br>8.6339 | 3.0457<br>8.0004 |
| | 6 | 8.4750<br>14.8080 | 7.7617<br>14.1017 | 7.0342<br>13.4098 | 6.2787<br>12.7311 | 5.5390<br>12.0657 | 4.7722<br>11.4130 | 3.9914<br>10.7742 |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 3 | 5.5076<br>9.4082 | 4.8039<br>8.7259 | 4.0815<br>8.0623 | 3.3411<br>7.4166 | 2.5839<br>6.7877 | 1.8116<br>6.1740 | 1.0255<br>5.5740 |
| 1.50 | 4 | 6.3769<br>13.5634 | 5.6521<br>12.9204 | 4.9186<br>12.2862 | 4.1767<br>11.6603 | 3.4268<br>11.0424 | 2.6693<br>10.4321 | 1.9046<br>9.8290 |
| | 5 | 7.2491<br>18.1033 | 6.5159<br>17.4854 | 5.7777<br>16.8724 | 5.0347<br>16.2642 | 4.2871<br>15.6606 | 3.5351<br>15.0614 | 2.7787<br>14.4662 |
| | 6 | 8.1106<br>22.9914 | 7.3730<br>22.3929 | 6.6324<br>21.7975 | 5.8888<br>21.2051 | 5.1422<br>20.6156 | 4.3928<br>20.0290 | 3.6407<br>19.4450 |
| | (lim) | (2.0544) | (2.1596) | (2.1950) | (2.1815) | (2.1235) | (2.0153) | (1.8333) |
| | lim | 5.0553 | 4.5568 | 3.9205 | 3.1857 | 2.3306 | 1.4317 | 0.3604 |
| | 3 | 5.4493<br>8.5647 | 4.7616<br>7.8502 | 4.0479<br>7.1617 | 3.3087<br>6.4988 | 2.5457<br>5.8595 | 1.7617<br>5.2414 | 0.9593<br>4.6416 |
| 1.54 | 4 | 6.3169<br>12.1529 | 5.5994<br>11.4828 | 4.8695<br>10.8252 | 4.1275<br>10.1796 | 3.3741<br>9.5454 | 2.6100<br>8.9220 | 1.8357<br>8.3088 |
| | 5 | 7.1825<br>16.0452 | 6.4533<br>15.4005 | 5.7167<br>14.7631 | 4.9730<br>14.1329 | 4.2225<br>13.5095 | 3.4654<br>12.8926 | 2.7020<br>12.2820 |
| | 6 | 8.0321<br>20.2250 | 7.2729<br>19.6229 | 6.5566<br>18.9780 | 5.8118<br>18.3615 | 5.0625<br>17.7495 | 4.3089<br>17.1419 | 3.5511<br>16.5384 |
| | (lim) | (2.1843) | (2.3464) | (2.4064) | (2.3990) | (2.3316) | (2.1956) | (1.9532) |
| | lim | 5.0918 | 4.6754 | 4.0738 | 3.3474 | 2.5090 | 1.5434 | 0.3836 |
| | 3 | 5.4600<br>7.7714 | 4.8019<br>7.0108 | 4.1076<br>6.2861 | 3.3723<br>5.6026 | 2.5998<br>4.9563 | 1.7956<br>4.3418 | 0.9661<br>3.7524 |
| 1.58 | 4 | 6.3530<br>10.8201 | 5.6497<br>10.1151 | 4.9278<br>9.4286 | 4.1877<br>8.7603 | 3.4303<br>8.1094 | 2.6567<br>7.4746 | 1.8683<br>6.8547 |
| | 5 | 7.2432<br>14.0825 | 6.5226<br>13.4046 | 5.7908<br>12.7381 | 5.0479<br>12.0825 | 4.2945<br>11.4375 | 3.5309<br>10.8022 | 2.7577<br>10.1774 |
| | 6 | 8.1125<br>17.5615 | 7.3829<br>16.9021 | 6.6458<br>16.2503 | 5.9011<br>15.6060 | 5.1493<br>14.9688 | 4.3905<br>14.3386 | 3.6251<br>13.7151 |
| | (lim) | (2.4591) | (2.7341) | (2.8522) | (2.8479) | (2.7645) | (2.5776) | (2.2204) |
| | lim | 5.3578 | 5.1019 | 4.5670 | 3.8583 | 2.9976 | 1.9619 | 0.6386) |
| | 3 | 5.5944<br>6.9503 | 5.0351<br>6.0737 | 4.4184<br>5.2545 | 3.7003<br>4.5367 | 2.8809<br>3.9202 | 2.0042<br>3.3610 | 1.1013<br>2.8280 |
| 1.62 | 4 | 6.5384<br>9.4419 | 5.7819<br>8.6811 | 5.1736<br>7.9522 | 4.4422<br>7.2562 | 3.6871<br>6.6063 | 2.8873<br>5.9567 | 2.0708<br>5.3459 |
| | 5 | 7.5241<br>12.0713 | 6.8259<br>11.3447 | 6.1017<br>10.6380 | 5.3697<br>9.9510 | 4.6127<br>9.2832 | 3.8375<br>8.6339 | 3.0457<br>8.0004 |
| | 6 | 8.4750<br>14.8080 | 7.7617<br>14.1017 | 7.0342<br>13.4098 | 6.2787<br>12.7311 | 5.5390<br>12.0657 | 4.7722<br>11.4130 | 3.9914<br>10.7742 |

## TABLEAU II Valeurs de $\varpi_2$

| $n_1$ | $n_2$ / $\varpi_1$ / $\varphi_1$ | 1.54 | | | | | | | 1.58 | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | — 2 | — 3/2 | — 1 | — 1/2 | 0 | + 1/2 | + 1 | — 2 | — 3/2 | — 1 | — 1/2 | 0 | + 1/2 | + 1 |
| 1.50 | (lim) | (2.3874) | (2.5381) | (2.6024) | (2.6042) | (2.5493) | (2.4315) | (2.2261) | (2.1304) | (2.2377) | (2.2787) | (2.2718) | (2.2207) | (2.1209) | (1.9530) |
| | lim | — 2.2523 | — 1.6493 | — 1.0507 | — 0.4554 | + 0.1377 | + 0.7286 | + 1.3175 | — 2.2316 | — 1.6288 | — 1.0319 | — 0.4388 | + 0.1510 | + 0.7382 | + 1.3234 |
| | 3 | — 0.7069 | — 0.2422 | + 0.2899 | + 0.8990 | + 1.5823 | + 2.3278 | + 3.1236 | + 0.1361 | + 0.6803 | + 1.2682 | + 1.9001 | + 2.5737 | + 3.2849 | + 4.0282 |
| | | — 3.7308 | — 3.0066 | — 2.3542 | — 1.7694 | — 1.2638 | — 0.8201 | — 0.4228 | — 4.4193 | — 3.7820 | — 3.1886 | — 2.6392 | — 2.1315 | — 1.6613 | — 1.2233 |
| | 4 | + 1.0831 | + 1.5409 | + 2.1311 | + 2.7538 | + 3.4082 | + 4.0923 | + 4.8040 | + 2.3589 | + 2.9588 | + 3.5802 | + 4.2227 | + 4.8855 | + 5.5674 | + 6.2674 |
| | | — 5.2732 | — 4.6460 | — 4.0513 | — 3.4891 | — 2.9585 | — 2.4577 | — 1.9844 | — 6.3414 | — 5.7675 | — 5.2150 | — 4.6836 | + 4.1724 | — 3.6805 | — 3.2066 |
| | 5 | + 2.8157 | + 3.4060 | + 4.0164 | + 4.6470 | + 5.2969 | + 5.9657 | + 6.6526 | + 4.8757 | + 5.5003 | + 6.1379 | + 6.7885 | + 7.4514 | + 8.1265 | + 8.8130 |
| | | — 6.9083 | — 6.3175 | — 5.7472 | — 5.1967 | — 4.6657 | — 4.1536 | — 3.6595 | — 8.4516 | — 7.9094 | — 7.3801 | — 6.8637 | — 6.3599 | — 5.8680 | — 5.3877 |
| | 6 | + 4.8120 | + 5.4555 | + 6.0778 | + 6.7140 | + 7.3639 | + 8.0268 | + 8.7027 | + 7.7044 | + 8.3440 | + 8.9926 | + 9.6498 | + 10.3155 | + 10.9895 | + 11.6715 |
| | | — 8.6903 | — 8.1215 | — 7.5667 | — 7.0260 | — 6.4986 | — 5.9846 | — 5.4833 | — 10.7633 | — 10.2328 | — 9.7310 | — 9.2280 | — 8.7334 | — 8.2470 | — 7.7686 |
| 1.54 | (lim) | | | | | | | | (2.4200) | 2.6057)) | (2.6832) | (2.6862) | (2.6223) | (2.4834) | (2.2345 |
| | lim | | | | | | | | — 2.2607 | — 1.6543 | — 1.0532 | — 0.4555 | + 0.1395 | + 0.7321 | + 1.3224) |
| | 3 | | | | | | | | — 0.9121 | — 0.4772 | + 0.0351 | + 0.6432 | + 1.3442 | + 2.1172 | + 2.9383 |
| | | | | | | | | | — 3.5505 | — 2.7913 | — 2.1101 | — 1.5244 | — 1.0317 | — 0.6108 | — 0.2380 |
| | 4 | | | | | | | | + 0.6098 | + 1.1583 | + 1.7547 | + 2.3690 | + 3.0302 | + 3.7257 | + 4.4523 |
| | | | | | | | | | — 4.9368 | — 4.2957 | — 3.6923 | — 3.1269 | — 2.5984 | — 2.1042 | — 1.6410 |
| | 5 | | | | | | | | + 2.2530 | + 2.8359 | + 3.4454 | + 4.0783 | + 4.7337 | + 5.4106 | + 6.1081 |
| | | | | | | | | | — 6.3932 | — 5.7967 | — 5.2205 | — 4.6676 | — 4.1372 | — 3.6284 | — 3.1402 |
| | 6 | | | | | | | | + 4.0722 | + 4.6704 | + 5.2932 | + 5.9321 | + 6.5867 | + 7.2566 | + 7.9409 |
| | | | | | | | | | — 7.9915 | — 7.4079 | — 6.8487 | — 6.3057 | — 5.7783 | — 5.2662 | — 4.7677 |

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | (lim) | (2.0256) | | (2.1103) | | (2.1390) | | (2.1264) | | (2.0761) | | (1.9835) | | (1.8320) | (1.9714) | | (2.0410) | | (2.0610) | | (2.0440) | | (1.9931) | | 1.9041) | | (1.7617 |
| | lim | — 2.2134 | | — 1.6112 | | — 1.0216 | | — 0.4251 | | + 0.1619 | | + 0.7462 | | + 1.3282 | — 2.1958 | | — 1.5947 | | — 1.0101 | | — 0.4128 | | + 0.1717 | | + 0.7534 | | + 1.3324 |
| | 3 | + 0.6713 | | + 1.2493 | | + 1.8620 | | + 2.5083 | | + 3.1863 | | + 3.8931 | | + 4.6253 | + 1.0560 | | + 1.6568 | | + 2.2869 | | + 2.9451 | | + 3.6296 | | + 4.3377 | | + 5.0674 |
| | | — 4.8045 | | — 4.2080 | | — 3.6463 | | — 3.1183 | | — 2.6219 | | — 2.1542 | | — 1.7120 | — 5.0457 | | — 4.4784 | | — 3.9403 | | — 3.4302 | | — 2.9464 | | — 2.4864 | | — 2.0478 |
| 1.50 | 4 | + 3.2842 | | + 3.9169 | | + 4.5492 | | + 5.2056 | | + 5.8786 | | + 6.5657 | | + 7.2668 | + 3.9652 | | + 4.6077 | | + 5.2643 | | + 5.9336 | | + 6.6156 | | + 7.3095 | | + 8.0148 |
| | | — 6.9668 | | — 6.4352 | | — 5.9031 | | — 5.3965 | | — 4.9041 | | — 4.4269 | | — 3.9626 | — 7.3619 | | — 6.8484 | | — 6.3483 | | — 5.8618 | | — 5.3878 | | — 4.9259 | | — 4.4753 |
| | 5 | + 6.2804 | | + 6.9268 | | + 7.5833 | | + 8.2493 | | + 8.9245 | | + 9.6089 | | + 10.3017 | + 7.3175 | | + 7.9814 | | + 8.6532 | | + 9.3327 | | + 10.0194 | | + 10.7132 | | + 11.4139 |
| | | — 9.3527 | | — 8.8442 | | — 8.3454 | | — 7.8353 | | — 7.3767 | | — 6.9040 | | — 6.4439 | — 9.9125 | | — 9.4316 | | — 8.9586 | | — 8.4931 | | — 8.0349 | | — 7.5838 | | — 7.1396 |
| | 6 | + 9.6600 | | + 10.3212 | | + 10.9890 | | + 11.6628 | | + 12.3427 | | + 13.0287 | | + 13.7205 | + 11.0999 | | + 11.7786 | | + 12.4621 | | + 13.1505 | | + 13.8436 | | + 14.5412 | | + 15.2431 |
| | | — 11.9566 | | — 11.4712 | | — 11.0003 | | — 10.5197 | | — 10.0532 | | — 9.5925 | | — 9.1577 | — 12.6806 | | — 12.2241 | | — 11.7727 | | — 12.3260 | | — 10.8839 | | — 10.4463 | | — 10.0132 |
| | (lim) | (2.1605) | | (2.2928) | | (2.3429) | | (2.3355) | | (2.2767) | | (2.1594) | | (1.9569) | (2.0544) | | (2.1596) | | (2.1950) | | (2.1815) | | (2.1235) | | (2.0153) | | (1.8333) |
| | lim | — 2.2374 | | — 1.6340 | | — 1.0346 | | — 0.4394 | | — 0.1523 | | — 0.7411 | | 1.3275 | — 2.2227 | | 1.6167 | | 1.0167 | | — 0.4260 | | + 0.1640 | | + 0.7480 | | + 1.3325 |
| | 3 | — 0.1527 | | + 0.3777 | | + 0.9681 | | + 1.5930 | | + 2.2759 | | + 3.0017 | | + 3.7635 | + 0.3291 | | + 0.8989 | | + 1.5081 | | + 2.1572 | | + 2.8429 | | + 3.5514 | | + 4.3085 |
| | | — 4.1672 | | — 3.5115 | | — 2.9158 | | — 2.3545 | | — 1.8512 | | — 1.3909 | | — 0.9666 | — 4.5119 | | — 3.9015 | | — 3.3315 | | — 2.8011 | | — 2.3075 | | — 1.8468 | | — 1.4146 |
| 1.54 | 4 | + 1.8426 | | + 2.4382 | | + 3.0588 | | + 3.7038 | | + 4.3723 | | + 5.0629 | | + 5.7738 | + 2.6761 | | + 3.2978 | | + 3.9389 | | + 4.5989 | | + 5.2768 | | + 5.9713 | | + 6.6818 |
| | | — 5.8861 | | — 5.3047 | | 4.7466 | | — 4.2129 | | — 3.7025 | | — 3.2143 | | — 2.7466 | — 6.4476 | | 5.9000 | | — 5.3719 | | — 4.8626 | | — 4.3712 | | — 3.8967 | | — 3.4379 |
| | 5 | + 4.0929 | | + 4.7162 | | + 5.3547 | | + 6.0083 | | + 6.6766 | | + 7.3578 | | + 8.0527 | + 5.3537 | | + 6.0037 | | + 6.6617 | | + 7.3309 | | + 8.0108 | | + 8.7011 | | + 9.4012 |
| | | — 7.7692 | | — 7.2207 | | — 6.6875 | | 6.1691 | | — 5.6651 | | — 5.1750 | | — 4.6980 | — 8.5759 | | 8.0624 | | 7.5603 | | — 7.0696 | | — 6.5895 | | — 6.1196 | | — 5.6597 |
| | 6 | + 6.6170 | | + 7.2571 | | + 7.9075 | | + 8.5678 | | + 9.2381 | | + 9.9178 | | + 10.6067 | + 8.3762 | | + 9.0762 | | + 9.7083 | | + 10.3855 | | + 11.0698 | | + 11.7609 | | + 12.4586 |
| | | — 9.8261 | | — 9.3008 | | — 8.7859 | | — 8.2811 | | — 7.7859 | | — 7.3004 | | — 6.8240 | — 10.8952 | | 10.4436 | | — 9.9243 | | — 9.4499 | | — 8.9826 | | — 8.5223 | | — 8.0684 |
| | (lim) | (2.4442) | | (2.6710) | | (2.7631) | | (2.7675) | | (2.6940) | | (2.5322) | | (2.2329) | (2.1843) | | (2.3464) | | (2.4064) | | (2.3990) | | (2.3316) | | (2.1956) | | (1.9532) |
| | lim | — 2.2692 | | — 1.6592 | | — 1.0553 | | 0.4554 | | + 0.1413 | | + 0.7356 | | + 1.3277 | — 2.2496 | | — 1.6391 | | — 1.0225 | | — 0.4397 | | + 0.1538 | | + 0.7441 | | + 1.3323 |
| | 3 | — 1.0785 | | — 0.6788 | | — 0.1925 | | + 0.4125 | | + 1.1365 | | + 1.9420 | | + 2.7943 | — 0.3920 | | + 0.1243 | | + 0.6967 | | + 1.3320 | | + 2.0249 | | + 2.7667 | | + 3.5475 |
| | | — 3.4072 | | — 2.6088 | | — 1.8953 | | — 1.3028 | | — 0.8284 | | — 0.4354 | | — 0.0893 | — 3.9612 | | — 3.2867 | | — 2.6679 | | — 2.1125 | | — 1.6145 | | — 1.1654 | | — 0.7554 |
| 1.58 | 4 | + 0.3004 | | + 0.8433 | | + 1.4203 | | + 2.0461 | | + 2.7143 | | + 3.4219 | | + 4.1637 | + 1.4128 | | + 2.0033 | | + 2.6225 | | + 3.2700 | | + 3.9463 | | + 4.6438 | | + 5.3661 |
| | | — 4.6606 | | — 4.0045 | | — 3.3917 | | — 2.8230 | | — 2.2969 | | — 1.8100 | | — 1.3575 | — 5.5131 | | — 4.9291 | | — 4.3557 | | — 3.8195 | | — 3.3104 | | — 2.8261 | | — 2.3650 |
| | 5 | + 1.7797 | | + 2.3610 | | + 2.9692 | | + 3.6041 | | + 4.2649 | | + 4.9503 | | + 5.6589 | + 3.4415 | | + 4.0631 | | + 4.7022 | | + 5.3585 | | + 6.0312 | | + 6.7191 | | + 9.4233 |
| | | — 5.9738 | | — 5.3645 | | — 4.7822 | | — 4.2266 | | — 3.6970 | | — 3.1917 | | — 2.7099 | — 7.2041 | | — 6.6489 | | — 6.1115 | | — 5.5910 | | — 5.0871 | | — 4.5982 | | — 4.1257 |
| | 6 | + 3.4212 | | + 4.0253 | | + 4.6407 | | + 5.2822 | | + 5.9416 | | + 6.6183 | | + 7.3116 | + 5.7135 | | + 6.3535 | | + 7.0053 | | + 7.6687 | | + 8.3433 | | + 9.0198 | | + 11.7467 |
| | | — 7.3904 | | — 6.8078 | | — 6.2532 | | — 5.7079 | | — 5.1805 | | — 4.6705 | | — 4.1772 | — 9.0500 | | — 8.5198 | | — 8.0014 | | — 7.4947 | | — 7.9991 | | — 6.5055 | | — 6.0403 |

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | (lim) | (2.4591) | | (2.7341) | | (2.8522) | | (2.8479) | | (2.7645) | | (2.5776) | | (2.2204) | | | | | | | | | |
| | lim | — 2.2776 | | — 1.6640 | | — 1.0304 | | — 0.4555 | | + 0.1432 | | + 0.7386 | | + 1.3320 | | | | | | | | | |
| | 3 | — 1.2135 | | — 0.8554 | | — 0.3758 | | + 0.1925 | | + 0.9497 | | + 1.7947 | | + 2.6800 | | | | | | | | | |
| | | — 3.2938 | | — 2.4489 | | — 1.6920 | | — 1.0907 | | — 0.6449 | | — 0.2869 | | + 0.0308 | | | | | | | | | |
| 1.62 | 4 | + 0.0631 | | + 0.5878 | | + 1.1581 | | + 1.7839 | | + 2.4591 | | + 3.1764 | | + 3.9350 | | | | | | | | | |
| | | — 4.4009 | | — 3.7312 | | — 3.1138 | | — 2.5387 | | — 2.0195 | | — 1.5426 | | — 1.1002 | | | | | | | | | |
| | 5 | + 1.3844 | | + 1.9600 | | + 2.5665 | | + 3.2033 | | + 3.8697 | | + 4.5640 | | + 5.2838 | | | | | | | | | |
| | | — 5.6211 | | — 5.0017 | | — 4.4129 | | — 3.8545 | | — 3.3257 | | — 2.8248 | | — 2.3494 | | | | | | | | | |
| | 6 | + 2.8680 | | + 3.4671 | | + 4.0900 | | + 4.7338 | | + 5.3981 | | + 6.0819 | | + 6.7843 | | | | | | | | | |
| | | — 6.9104 | | — 6.3201 | | — 5.7515 | | — 5.2039 | | — 4.6766 | | — 4.1690 | | — 3.8601 | | | | | | | | | |

TABLEAU IIIb

Valeurs de A + 2, ($\varphi_1$ limites).

| $n_2$ | 1.54 | | | | | | | 1.58 | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\varepsilon_1$ / $n_1$ | −2 | −3/2 | −1 | −1/2 | 0 | +1/2 | +1 | −2 | −3/2 | −1 | −1/2 | 0 | +1/2 | +1 |
| 1.50 | 4.381382 | 4.486601 | 4.388830 | 4.388892 | 4.386988 | 4.382908 | 4.375796 | 4.409648 | 4.416892 | 4.419660 | 4.419194 | 4.415744 | 4.409008 | 4.397670 |
| 1.54 | | | | | | | | 4.345390 | 4.351495 | 4.354044 | 4.354142 | 4.352040 | 4.347472 | 4.339290 |

| $n_2$ | 1.62 | | | | | | | 1.66 | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\varepsilon_1$ / $n_1$ | −2 | −3/2 | −1 | −1/2 | 0 | +1/2 | +1 | −2 | −3/2 | −1 | −1/2 | 0 | +1/2 | +1 |
| 1.50 | 4.434628 | 4.442993 | 4.445826 | 4.444582 | 4.439616 | 4.430470 | 4.415506 | 4.458173 | 4.467117 | 4.469686 | 4.467502 | 4.460962 | 4.449522 | 4.431224 |
| 1.54 | 4.373129 | 4.381613 | 4.384826 | 4.384352 | 4.380680 | 4.373058 | 4.360072 | 4.397691 | 4.407568 | 4.410890 | 4.409622 | 4.404176 | 4.394020 | 4.376932 |

| | 1.62 | | | | | | | 1.66 | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_2$ | −2 | −3/2 | −1 | −1/2 | 0 | +1/2 | +1 | −2 | −3/2 | −1 | −1/2 | 0 | +1/2 | +1 |
| 1.58 | 4.310961 | 4.318049 | 4.320930 | 4.321066 | 4.318766 | 4.313690 | 4.304358 | 4.338070 | 4.347957 | 4.351618 | 4.351166 | 4.347054 | 4.338758 | 4.323972 |
| 1.62 | | | | | | | | 4.277974 | 4.286155 | 4.289370 | 4.289540 | 4.287060 | 4.281062 | 4.270872 |

# Etude théorique et expérimentale de la figure de diffraction de l'héliomètre

PAR

**Norbert SÉGARD et Albert VANDENBOSSCHE**
Faculté libre des Sciences de Lille

## 1. *Objet de cette étude*

Dans une communication précédente, l'un de nous (1) a étudié la figure de diffraction donnée par une ouverture circulaire couverte à moitié par une lame à faces parallèles. Il signalait que ce travail pouvait être appliqué à l'étude d'autres figures de diffraction et en particulier à celle donnée par une ouverture demi-circulaire, problème que l'on rencontre dans l'étude de l'héliomètre. Nous donnons ici nos résultats expérimentaux et la carte des lignes isophotes relatifs à cette figure de diffraction, ainsi que les tableaux numériques nous ayant permis de faire le tracé de cette carte.

## 2. *Héliomètre de Bouguer*

L'héliomètre de Bouguer (2) peut, schématiquement, se décrire de la façon suivante. Considérons l'objectif d'une lunette de distance focale $f$. Coupons-le en deux parties égales $P_1$ et $P_2$ par un plan passant par l'axe optique. Des dispositifs convenables permettent le déplacement des centres optiques $O_1$ et $O_2$ des deux demi-lentilles $P_1$ et $P_2$ suivant une même droite $xx'$. Désignons par $d$ la distance $O_1O_2$. Soit un objet AB situé dans un plan passant par $O_1O_2$ et à la distance $p$ des deux demi-lentilles. Celles-ci en donneront deux images $A_1B_1$ et $A_2B_2$ à la distance $p'$. Ces images se toucheront, c'est-à-dire $B_2$ coïncidera avec $A_1$, lorsque l'on aura :

$$d = \frac{\dfrac{AB}{p}}{\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'}} = \frac{\theta}{\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'}}$$

Si l'objet est à l'infini, $p = \infty$, $p' = f$ et $d = \theta f$; l'écart des deux lentilles est proportionnel à l'angle apparent.

Les phénomènes de diffraction limitent évidemment les mesures des distances angulaires des étoiles que permet de faire l'héliomètre. Aussi le problème de la diffraction par une ouverture demi-circulaire a-t-il retenu l'attention d'assez nombreux chercheurs.

### 3. *Travaux relatifs à l'héliomètre*

Bessel ([3]) donne déjà de cette figure de diffraction une description d'ailleurs peu rigoureuse, et en propose une explication qualitative peu convaincante.

Bruns ([4]) est le premier, à notre connaissance, à avoir commencé l'étude analytique de cette figure de diffraction, mais son explication est loin d'être complète.

On trouve dans le travail de Scheiner et Hirayama ([5]), parmi de nombreuses photographies d'images de diffraction produites par des ouvertures variées, celle donnée par un demi-cercle. Des photographies pratiquement identiques aux précédentes sont publiées par R. Straubel ([6]) et par P. E. Everitt ([7]). Beaucoup plus récemment, A. Danjon ([8]), afin de mettre au point un micromètre interférentiel à demi-onde permettant la mesure des étoiles doubles, ainsi que celle des diamètres des petites planètes et des satellites de brillance faible, donne aussi, parmi d'autres photographies, celle de la figure de diffraction donnée par un demi-cercle.

Toutes ces photographies sont beaucoup moins riches en « ornements » que celles que nous avons pu effectuer. D'autre part, seuls Everitt et Danjon donnent les cartes des lignes isophotes de cette figure de diffraction. La plus détaillée est celle donnée par Everitt, qui a dû procéder, pour l'établir, à un très laborieux travail d'intégration mécanique, mais cet auteur n'a malheureusement pas publié les tableaux numériques lui ayant permis de tracer cette carte. Les travaux de Danjon et ceux de Ségard ([9]) nous ont permis de développer ces tables numériques en vue d'une construction plus détaillée de la carte des isophotes.

### 4. *Etude expérimentale de la figure de diffraction*

Le dispositif expérimental a déjà été décrit ([1]). La lame à faces parallèles L est évidemment remplacée ici par une lame opaque.

Les photographies suivantes ont été obtenues avec des temps de

pose très variables. Leur examen permet de se rendre compte de l'aspect détaillé de la figure de diffraction ainsi que d'apprécier les intensités relatives des différents maxima lumineux.

Fig. I-1; pose : 5 secondes.

A la place de la tache centrale de diffraction que produirait l'ouverture circulaire du diaphragme, l'introduction de la lame opaque sur la moitié de ce diaphragme donne une tache de forme ovale.

Fig. I-2 (2 minutes), I-3 (10 minutes), I-4 (30 minutes).

Sur l'axe horizontal, des maxima secondaires se disposent de part et d'autre de la tache centrale, tandis qu'au-dessus et au-dessous apparaissent des arcs lumineux séparés les uns des autres par des minima non nuls. La figure présente une double symétrie par rapport aux axes horizontal et vertical.

Fig. II (2 heures)

C'est l'aspect général de la figure de diffraction. On remarquera son analogie avec celle donnée par une ouverture circulaire couverte à moitié par une lame demi-onde à faces parallèles, en particulier pour la répartition des maxima secondaires suivant l'axe horizontal.

Cependant, dans notre cas, il n'y a pas de minima nuls entre ces maxima secondaires. D'autre part, tandis que, dans la figure précédente, il n'y avait aucune lumière sur l'axe vertical et qu'il existait des lignes d'intensité nulle, nous verrons, dans la carte d'isophotes de cette figure-ci, que les seuls minima nuls se trouvent en certains points seulement de l'axe vertical et, approximativement, d'une parallèle à l'axe horizontal (entre les maxima secondaires répartis sur cet axe). Par ailleurs, l'ensemble des arcs lumineux entourant le corps de la figure de diffraction donne à cette figure une forme générale plus ovale que la précédente.

### 5. *Etude théorique de la figure de diffraction*

Le point objet P, situé optiquement à l'infini, forme une image géométrique en P′, foyer de la lentille objectif, de centre optique $\Omega$ et de distance focale $f$. Devant cette lentille, se trouve le diaphragme semi-circulaire, de rayon R, de centre O, de surface S. Le faisceau incident est normal au diaphragme. ([1] fig. VI p. 58)

Nous désignerons par $Oz$ l'axe situé suivant $O\Omega$, par $Oy$ l'axe qui coïncide avec le bord rectiligne du diaphragme, par $Ox$ l'axe qui rend positif le trièdre $Oxyz$. De P′, nous menons des axes $P'\xi$, $P'\eta$ respectivement parallèles à $Ox$ et $Oy$.

Nous cherchons l'intensité lumineuse au point M ($\xi$, $\eta$), voisin de P', du plan focal P'$\xi\eta$. La différence de marche qui existe entre le rayon diffracté en O et celui provenant de N ($x$, $y$) pour arriver en M est :

$$\delta = \frac{\xi x + \eta y}{f}$$

et l'on voit que c'est une avance du rayon issu de N sur celui issu de O.

Si donc nous désignons par $dxdy$. (sin $2\pi t/T$) le mouvement vibratoire au point M pour le faisceau issu de O ($x = 0$, $y = 0$), celui qui vient de N ($x$, $y$) donnera en M, au même instant, un mouvement représenté par sin $2\pi\left(t/T + \frac{\delta}{\lambda}\right)$. Le mouvement résultant en M a donc pour expression :

$$U = \iint_s \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{\delta}{\lambda}\right) dx\, dy$$

l'intégrale étant étendue à l'aire S du diaphragme demi-circulaire.

Ce mouvement peut encore s'écrire :

$$U = A \sin 2\pi t/T + B \cos 2\pi t/T \text{ avec}$$

$$\left.\begin{matrix} A \\ B \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2R^2} \iint_s \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \frac{2\pi}{\lambda f}(\xi x + \eta y)\, dx\, dy$$

(le coefficient $1/2\ R^2$ n'est mis qu'en vue de simplifications ultérieures de calculs numériques). L'intensité en M est donc proportionnelle à $I = A^2 + B^2$.

Le calcul des intégrales A et B a déjà été présenté dans la communication précédente. En repérant le point M par ses coordonnées polaires, $\rho$ et $\alpha$, par rapport à l'axe polaire P'$\xi$, $\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$, et en posant $r = \frac{2\pi\rho R}{\lambda f}$, l'on a $A = \frac{\pi}{2\pi} J_1(r)$

$J_1(r)$ étant la fonction de Bessel de première espèce.

$$B = \cos\alpha \sqrt{\frac{\pi \sin\alpha}{2r}}\, J_{3/2}(r\sin\alpha) + \int_{\sin\alpha}^{1} \sqrt{1 - u^2} \sin r\, u\, du$$

On possède des tables détaillées des fonctions $J_1$ et $J_{3/2}$. La dernière intégrale peut être tabulée grâce à différents développements en série (9). Nous donnons en fin de cette étude les tables numériques

de A et de B que nous avons établies pour les valeurs de $\alpha$ croissant de 10° en 10° et pour les valeurs de $\frac{r}{\pi}$ croissant de 0,1 en 0,1 depuis 0 jusqu'à 10. Il va sans dire que, pour tracer la carte des isophotes, il nous a fallu calculer un très grand nombre de points qui ne figurent pas dans ces tables.

6. *Description de la carte des isophotes*

Cette carte est nettement plus compliquée que celle tracée pour la figure de diffraction donnée par une ouverture circulaire couverte à moitié par une lame demi-onde. Nous l'avons établie uniquement pour le premier quadrant. Fig. III. Nous y avons marqué les valeurs des intensités lumineuses et non celles des amplitudes, comme il avait été fait dans la carte précédente. On peut remarquer immédiatement qu'on ne trouve pas de « lignes de zéro » (intensité nulle).

Nous avons repéré les maxima et les minima. Chacun de ces points est entouré d'une isophote de valeur marquée, choisie pour que la figure apparaisse assez régulière. Par ailleurs, nous avons tracé des isophotes joignant les axes vertical et horizontal. Si, à partir de l'axe vertical, on suit le parcours de deux telles lignes voisines, on constate qu'elles entourent d'abord un minimum nul et un maximum, puis qu'elles se rapprochent pour ensuite s'écarter afin de contenir, avant l'étranglement suivant, un minimum et un maximum. En fin de parcours, elles deviennent très proches et ondulent au-dessus des maxima secondaires de l'axe horizontal jusqu'à rencontre de cet axe. Pour ces deux lignes, on peut remarquer que la « cote » de l'isophote de gauche est en général égale à celle des isophotes qui entourent les maxima placés immédiatement à sa droite et les minima placés immédiatement à sa gauche.

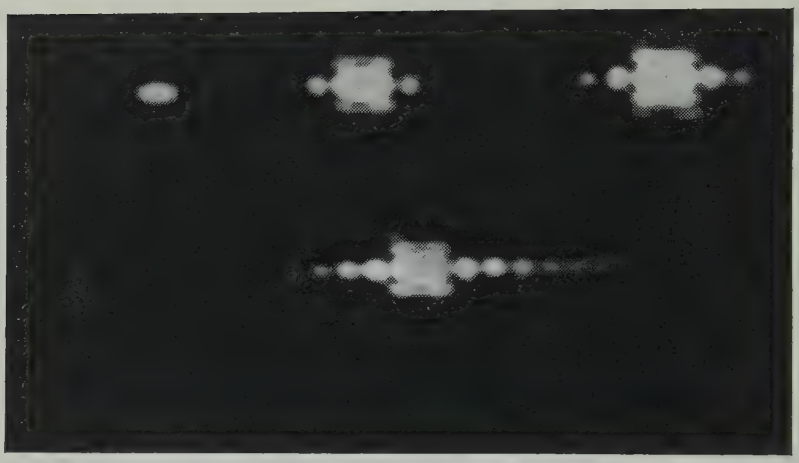
On retrouve, comme pour la figure précédente, les maxima à peu près alignés, d'une part suivant des droites parallèles à l'axe horizontal, d'autre part suivant des courbes de plus en plus inclinées sur l'axe vertical.

| | B $(r, \alpha) . 10^4$ | | | | | | | | | A$(r) . 10^4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $r/n$ | 0° | 10° | 20° | 30° | 40° | 50° | 60° | 70° | 80° | 90° | |
| 0,0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 7854 |
| 0,1 | 1040 | 1024 | 977 | 900 | 796 | 667 | 519 | 355 | 180 | 0 | 7757 |
| 0,2 | 2040 | 2008 | 1914 | 1761 | 1554 | 1301 | 1010 | 690 | 350 | 0 | 7473 |
| 0,3 | 2960 | 2913 | 2772 | 2544 | 2239 | 1869 | 1447 | 986 | 499 | 0 | 7014 |
| 0,4 | 3767 | 3704 | 3517 | 3217 | 2820 | 2344 | 1807 | 1227 | 620 | 0 | 6402 |
| 0,5 | 4453 | 4354 | 4122 | 3753 | 3272 | 2703 | 2072 | 1401 | 706 | 0 | 5668 |
| 0,6 | 4938 | 4843 | 4567 | 4133 | 3576 | 2932 | 2231 | 1499 | 752 | 0 | 4846 |
| 0,7 | 5270 | 5159 | 4840 | 4347 | 3725 | 3023 | 2279 | 1520 | 759 | 0 | 3972 |
| 0,8 | 5426 | 5300 | 4940 | 4391 | 3717 | 2977 | 2217 | 1464 | 726 | 0 | 3086 |
| 0,9 | 5415 | 5273 | 4872 | 4275 | 3561 | 2803 | 2054 | 1338 | 658 | 0 | 2225 |
| 1,0 | 5249 | 5092 | 4653 | 4013 | 3271 | 2516 | 1804 | 1154 | 561 | 0 | 1423 |
| 1,1 | 4950 | 4778 | 4303 | 3627 | 2872 | 2139 | 1486 | 926 | 442 | 0 | 709 |
| 1,2 | 4546 | 4359 | 3850 | 3144 | 2389 | 1696 | 1122 | 670 | 311 | 0 | +104 |
| 1,3 | 4067 | 3865 | 3323 | 2596 | 1853 | 1218 | 738 | 404 | 175 | 0 | —375 |
| 1,4 | 3545 | 3329 | 2757 | 2014 | 1297 | 732 | 356 | +145 | + 46 | 0 | 722 |
| 1,5 | 3011 | 2781 | 2181 | 1431 | 750 | +266 | + 1 | — 90 | — 70 | 0 | 939 |
| 1,6 | 2496 | 2251 | 1626 | 875 | +242 | —153 | —308 | 288 | 166 | 0 | 1032 |
| 1,7 | 2023 | 1764 | 1116 | +373 | —205 | 506 | 556 | 440 | 237 | 0 | 1018 |
| 1,8 | 1613 | 1340 | 673 | — 57 | 572 | 778 | 732 | 538 | 279 | 0 | 914 |
| 1,9 | 1280 | 994 | 309 | 401 | 847 | 960 | 831 | 581 | 293 | 0 | 744 |
| 2,0 | 1032 | 732 | + 33 | 651 | 1024 | 1049 | 852 | 571 | 280 | 0 | 531 |
| 2,1 | 869 | 556 | —155 | 807 | 1104 | 1049 | 804 | 513 | 244 | 0 | 299 |
| 2,2 | 787 | 461 | 259 | 874 | 1095 | 970 | 694 | 417 | 190 | 0 | — 71 |
| 2,3 | 776 | 438 | 289 | 863 | 1009 | 826 | 539 | 293 | 123 | 0 | +134 |
| 2,4 | 822 | 471 | 259 | 788 | 862 | 633 | 353 | 155 | — 51 | 0 | 302 |
| 2,5 | 909 | 547 | 185 | 665 | 672 | 412 | 154 | — 14 | + 20 | 0 | 422 |
| 2,6 | 1020 | 646 | — 84 | 513 | 457 | —180 | + 40 | +117 | 83 | 0 | 490 |
| 2,7 | 1137 | 752 | + 27 | 350 | 239 | + 42 | 216 | 227 | 135 | 0 | 505 |
| 2,8 | 1246 | 850 | 132 | 191 | — 32 | 240 | 359 | 310 | 170 | 0 | 472 |
| 2,9 | 1334 | 927 | 218 | — 51 | +148 | 399 | 461 | 359 | 188 | 0 | 398 |
| 3,0 | 1391 | 974 | 277 | + 62 | 291 | 512 | 517 | 374 | 187 | 0 | 294 |
| 3,1 | 1412 | 985 | 301 | 140 | 391 | 573 | 525 | 354 | 169 | 0 | 173 |
| 3,2 | 1395 | 959 | 291 | 180 | 445 | 582 | 488 | 304 | 137 | 0 | + 47 |
| 3,3 | 1342 | 896 | 246 | 185 | 454 | 545 | 412 | 229 | 94 | 0 | — 72 |
| 3,4 | 1259 | 804 | 173 | 159 | 424 | 466 | 306 | 139 | + 45 | 0 | 174 |
| 3,5 | 1152 | 688 | + 79 | 109 | 362 | 357 | 181 | + 42 | — 6 | 0 | 252 |
| 3,6 | 1030 | 559 | — 27 | + 43 | 277 | 229 | + 50 | — 53 | 53 | 0 | 299 |
| 3,7 | 906 | 427 | 136 | — 29 | 181 | + 94 | — 78 | 139 | 92 | 0 | 314 |
| 3,8 | 786 | 299 | 237 | 98 | + 83 | — 37 | 190 | 207 | 121 | 0 | 299 |
| 3,9 | 681 | 187 | 323 | 157 | — 8 | 152 | 280 | 252 | 137 | 0 | 256 |
| 4,0 | 596 | 95 | 387 | 198 | 84 | 245 | 339 | 273 | 140 | 0 | 193 |
| 4,1 | 536 | + 29 | 425 | 217 | 140 | 309 | 366 | 268 | 129 | 0 | 116 |
| 4,2 | 503 | — 10 | 435 | 213 | 172 | 341 | 359 | 239 | 107 | 0 | — 34 |
| 4,3 | 496 | 23 | 418 | 186 | 180 | 341 | 322 | 189 | 76 | 0 | + 46 |
| 4,4 | 513 | — 11 | 377 | 139 | 167 | 313 | 259 | 125 | — 39 | 0 | 117 |
| 4,5 | 548 | + 20 | 316 | 77 | 136 | 261 | 177 | — 52 | 0 | 0 | 161 |
| 4,6 | 597 | 64 | 242 | — 7 | 92 | 191 | — 85 | + 21 | + 37 | 0 | 206 |
| 4,7 | 651 | 115 | 162 | + 67 | — 42 | 112 | + 9 | 90 | 69 | 0 | 219 |
| 4,8 | 705 | 165 | 83 | 136 | + 10 | — 30 | 98 | 148 | 108 | 0 | 211 |
| 4,9 | 751 | 208 | — 11 | 195 | 55 | + 47 | 172 | 189 | 108 | 0 | 183 |
| 5,0 | 785 | 239 | + 48 | 239 | 91 | 112 | 228 | 211 | 112 | 0 | 139 |

B $(r, \alpha) . 10^4$ (*suite*) | $A(r) . 10^4$

| | 0° | 10° | 20° | 30° | 40° | 50° | 60° | 70° | 80° | 90° | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 785 | +239 | + 48 | +239 | + 91 | +112 | +228 | +211 | +112 | 0 | 139 |
| 1 | 803 | 254 | 91 | 265 | 113 | 163 | 261 | 214 | 105 | 0 | 85 |
| 2 | 803 | 252 | 116 | 269 | 119 | 193 | 269 | 196 | 88 | 0 | + 25 |
| 3 | 784 | 231 | 121 | 254 | 110 | 203 | 250 | 160 | 62 | 0 | — 33 |
| 4 | 750 | 196 | 111 | 222 | 88 | 195 | 216 | 114 | 35 | 0 | 85 |
| 5 | 701 | 146 | 84 | 173 | + 53 | 168 | 162 | + 57 | + 4 | 0 | 126 |
| 6 | 644 | + 88 | + 49 | 115 | + 13 | 130 | 95 | — 3 | — 27 | 0 | 153 |
| 7 | 583 | + 27 | + 10 | + 53 | — 30 | 83 | + 26 | 59 | 54 | 0 | 164 |
| 8 | 522 | — 34 | — 31 | — 9 | 72 | + 32 | — 44 | 109 | 76 | 0 | 159 |
| 9 | 467 | 89 | 67 | 66 | 107 | — 15 | 105 | 147 | 89 | 0 | 139 |
| 0 | 422 | 153 | 94 | 112 | 132 | 57 | 155 | 169 | 93 | 0 | 106 |
| 1 | 389 | 165 | 100 | 146 | 145 | 90 | 186 | 175 | 88 | 0 | 65 |
| 2 | 370 | 183 | 113 | 166 | 144 | 110 | 201 | 166 | 75 | 0 | — 20 |
| 3 | 366 | 185 | 102 | 169 | 130 | 118 | 197 | 141 | 56 | 0 | + 25 |
| 4 | 376 | 178 | 78 | 158 | 101 | 112 | 176 | 104 | 32 | 0 | 65 |
| 5 | 397 | 150 | 45 | 134 | 66 | 95 | 140 | 59 | — 5 | 0 | 98 |
| 6 | 425 | 120 | — 5 | 103 | — 24 | 71 | 95 | — 10 | + 20 | 0 | 119 |
| 7 | 458 | 84 | + 38 | 65 | + 21 | 40 | — 42 | + 38 | 44 | 0 | 129 |
| 8 | 491 | 48 | 81 | — 27 | 64 | — 8 | + 11 | 81 | 63 | 0 | 125 |
| 9 | 521 | — 15 | 119 | + 10 | 110 | + 23 | 61 | 116 | 75 | 0 | 110 |
| 0 | 543 | + 11 | 149 | 40 | 129 | 48 | 102 | 138 | 79 | 0 | 84 |
| 1 | 556 | 28 | 168 | 61 | 146 | 66 | 132 | 147 | 76 | 0 | 52 |
| 2 | 558 | 34 | 176 | 73 | 151 | 76 | 149 | 142 | 66 | 0 | + 16 |
| 3 | 549 | 29 | 171 | 74 | 143 | 76 | 151 | 124 | 50 | 0 | — 20 |
| 4 | 530 | + 14 | 156 | 65 | 124 | 68 | 142 | 96 | 30 | 0 | 52 |
| 5 | 501 | — 10 | 131 | 47 | 94 | 52 | 118 | 58 | + 6 | 0 | 79 |
| 6 | 467 | 40 | 99 | + 25 | 58 | 31 | 85 | + 18 | — 16 | 0 | 96 |
| 7 | 429 | 73 | 63 | — 2 | + 19 | + 8 | 46 | — 24 | 37 | 0 | 104 |
| 8 | 391 | 105 | + 27 | 29 | — 21 | — 18 | + 5 | 62 | 54 | 0 | 102 |
| 9 | 356 | 135 | — 8 | 52 | 57 | 40 | — 35 | 93 | 65 | 0 | 90 |
| 0 | 327 | 159 | 36 | 71 | 87 | 57 | 68 | 114 | 67 | 0 | 69 |
| 1 | 306 | 174 | 56 | 81 | 108 | 67 | 95 | 124 | 67 | 0 | 43 |
| 2 | 294 | 181 | 68 | 83 | 119 | 70 | 110 | 123 | 59 | 0 | — 14 |
| 3 | 291 | 178 | 71 | 77 | 120 | 65 | 116 | 110 | 45 | 0 | + 16 |
| 4 | 298 | 165 | 65 | 61 | 110 | 53 | 109 | 86 | 27 | 0 | 43 |
| 5 | 312 | 145 | 51 | 40 | 91 | 35 | 94 | 57 | — 7 | 0 | 65 |
| 6 | 331 | 120 | 32 | — 13 | 67 | —14 | 72 | — 22 | + 13 | 0 | 80 |
| 7 | 354 | 91 | — 10 | + 12 | 38 | + 10 | 42 | + 13 | 32 | 0 | 87 |
| 8 | 377 | 61 | + 13 | 44 | — 8 | 33 | — 12 | 46 | 47 | 0 | 85 |
| 9 | 398 | 34 | 34 | 69 | + 21 | 53 | + 18 | 75 | 57 | 0 | 75 |
| 0 | 414 | — 12 | 50 | 89 | 45 | 66 | 45 | 95 | 61 | 0 | 58 |
| 1 | 424 | + 5 | 60 | 102 | 63 | 74 | 67 | 106 | 60 | 0 | 36 |
| 2 | 426 | 13 | 63 | 106 | 74 | 75 | 80 | 107 | 53 | 0 | + 12 |
| 3 | 421 | 14 | 58 | 102 | 78 | 68 | 86 | 98 | 41 | 0 | — 13 |
| 4 | 408 | + 8 | 46 | 90 | 73 | 54 | 83 | 80 | 25 | 0 | 36 |
| 5 | 389 | — 5 | 29 | 71 | 62 | 35 | 73 | 55 | + 7 | 0 | 55 |
| 6 | 365 | 22 | + 6 | 48 | 45 | + 12 | 56 | + 26 | —10 | 0 | 68 |
| 7 | 339 | 42 | — 18 | + 21 | 26 | — 11 | 35 | — 5 | 27 | 0 | 74 |
| 8 | 313 | 62 | 42 | — 5 | + 6 | 34 | + 12 | 35 | 41 | 0 | 72 |
| 9 | 288 | 80 | 64 | 31 | — 14 | 54 | — 11 | 60 | 50 | 0 | 64 |
| 0 | 268 | 94 | 81 | 51 | 30 | 68 | 32 | 79 | 55 | 0 | 50 |

1 2 3



4

Fig. I

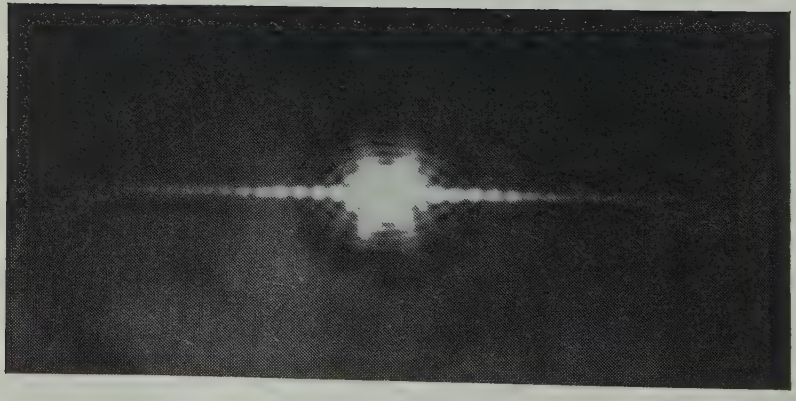


Fig. II

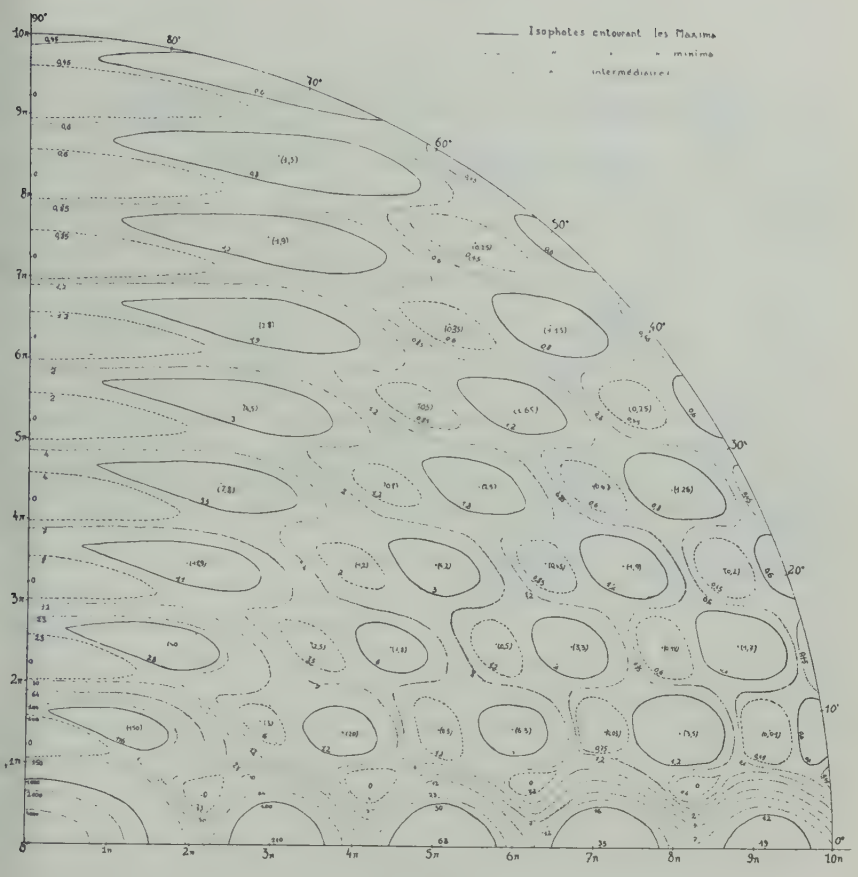

Isophotes entourant les Maxima
" " " minima
" intermédiaires
90°
80°
70°
60°
50°
40°
30°
20°
10°
0°
1π
2π
3π
4π
5π
6π
7π
8π
9π
10π

Fig. III

## REFERENCES


1. N. Ségard : *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles.* Tome LXVIII, I, pp. 53-62.
2. H. Bouasse : « Diffraction », Paris, 1923, p. 64. « Construction ... appareils de mesure et d'observation » Paris, 1935, p. 410.
3. Bessel : *Astronomische Untersuchungen* » Bd I 1841. « *Astronomische Nachrichten* » Bd VIII S. 411-426.
4. Bruns : « Uber die Beugungsfiguren des Heliometer-Objectivs » *Astron. Nach.* Bd CIV n° 2473.
5. Scheiner et Hirayama : « Photographische Aufnahmen Fraunhoferscher Beugungsfiguren » *Abhandl. Akad. Wiss in Berlin,* 1894.
6. R. Straubel : « Das Heliometerbild » *Astr. Nach.* 139, 1896 n° 3327.
7. P. E. Everitt : « On the nature of Diffraction figures due to the Heliometer » *Proc. of the Royal Soc,* series A, 83, 1910, pp. 302.
8. A. Danjon : « Description et théorie d'un micromètre interférentiel à demi-onde » *Ann. de l'Observatoire de Strasbourg.* T. III, 4me fascicule, 1936, p. 181.
9. N. Ségard : Thèse de Doctorat, Lille, 1953.

# Quartz piézoélectrique à utiliser pour l'obtention de l'effet Doppler

PAR

**MM. Norbert SÉGARD et Etienne BESÈME**
Faculté libre des Sciences de Lille

Dans une note (1), Monsieur Roig a montré que 60 m/s environ serait la vitesse linéaire minimum nécessaire pour observer la modification, par effet Doppler, d'une radiation monochromatique après une seule réflexion sur un miroir animé d'un mouvement sinusoïdal. Il demande si cette vitesse peut être atteinte par la face d'un quartz vibrant sans amener sa rupture.

Nos recherches ont porté sur les deux points suivants : I°) Choix du quartz pour l'obtention d'une vibration sinusoïdale sans déformation de la surface vibrante. II°) Détermination, pour un tel quartz, de la vitesse maximum à la rupture.

## I. Choix du quartz

1°) *Coupe* : Seule une coupe X d'un quartz vibrant en épaisseur, en demi-onde, est satisfaisante, malgré l'influence de la température sur la fréquence. Les coupes obliques provoquent des déformations de la surface vibrante; les autres modes de vibration des coupes X nous obligent à limiter la surface utile.

2°) *Surface et épaisseur* : Nos expériences ont montré que la vitesse demandée ne peut être obtenue. L'effet Doppler ne pourrait donc être observé qu'après plusieurs réflexions du pinceau lumineux entre la surface vibrante et une surface fixe. Dans ce but, nous avons choisi une surface carrée de un centimètre de côté. Pour cette coupe et cette surface, une épaisseur de 1,42 cm ($N \simeq 200$ Kilohertz) donne un mouvement sinusoïdal. Pour des épaisseurs plus petites, certaines régions de la surface restent au repos quand les autres vibrent. Ces

résultats sont nettement visibles avec la méthode utilisée par Monsieur Tolansky (2). Des franges fines d'interférence sont produites entre la surface du cristal parfaitement polie et argentée et une autre surface fixe semi-argentée qui, de plus, sert d'électrode.

Avec le quartz que nous venons de définir, en régime de vibration, les franges produites paraissent toutes s'élargir exactement de la même quantité, ce qui implique une amplitude identique en tout point de la surface. En réalité, les franges, restées fines, sont animées d'une vitesse sinusoïdale. Les bords extrêmes de la plage balayée correspondent à une vitesse nulle. Lorsque l'amplitude augmente, ces bords viennent au contact et le champ est uniformément éclairé. Pour une amplitude plus grande, les plages balayées commencent à se superposer; les deux bords extrêmes, de vitesse nulle, additionnent leur éclairement et nous retrouvons un système de franges fines sur fond éclairé. C'est ce que nous appellerons, dans ce qui suit, un « recouvrement ». L'amplitude de vibration du quartz est alors le quart de la longueur d'onde de la lumière monochromatique utilisée pour l'obtention des franges. Nous pouvons ainsi suivre une dizaine de tels recouvrements; par la suite, le fond du champ devient trop lumineux pour en distinguer de nouveaux.

Avec d'autres coupes du quartz ou d'autres dimensions de coupe X, les franges ne s'élargissent pas de façon uniforme dans toute leur longueur, ce qui indique que l'amplitude des différents points n'est pas constante d'une extrémité à l'autre de ces franges.

3°) *Attache* : Le quartz est fixé par quelques points du plan nodal sur les faces perpendiculaires à l'axe des Z.

Il est évident que l'amplitude de vibration du quartz dépend de très nombreux paramètres (3) : matière avec laquelle est fait le support du quartz, points de fixation choisis, position des électrodes, etc... De très faibles variations de l'un ou l'autre de ces paramètres, même imperceptibles, peuvent donner des modifications considérables d'amplitude, pour une même tension H. F. appliquée aux électrodes.

## II° Vitesse maximum a la rupture

1°) *Calcul de cette vitesse* : Désignons par $\rho$ la masse spécifique de notre barreau de quartz, d'épaisseur $e$, E son module d'élasticité, F un facteur de friction cause d'amortissement, A une distance $x$

du centre du barreau $\left(-\frac{e}{2} \leqslant x \leqslant +\frac{e}{2}\right)$, l'élongation $a$ de la vibration U.S., satisfait à l'équation (4) :

$$\rho \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + F \frac{\partial^3 a}{\partial x^2 \partial t}$$

sous l'action du champ électrique $H = H_m \exp^{j\omega t}$

le quartz est soumis à la force $X = X_m \exp^{j\omega t}$

où $X_m = -\varepsilon H_m$

$\varepsilon$ = coefficient piézoélectrique : $5{,}2.10^4$ U.E.S.C.G.S.

Il prend alors une élongation

avec :

$$a = A(x) \exp^{j\omega t} \qquad \text{(Eq. 1)}$$

$$\varepsilon) = \frac{X_m c}{E \omega} \frac{\sin p . \cos q - \frac{f^2 e x}{2c^2} \cos p . \sin q - j \left[\frac{f x}{c} \cos p . \cos q + \frac{f e}{2c} \sin p . \sin q\right]}{\cos^2 q + \frac{f^2 e^2}{4 c^2} \sin^2 q} \qquad \text{(Eq. 2)}$$

$f$ = coefficient d'amortissement, lié à F.

$c$ = vitesse de propagation de l'onde dans le quartz.

$$p = \frac{\omega x}{c} \qquad q = \frac{\omega e}{2c}$$

De ces équations (1) et (2), nous allons déduire l'amplitude et la vitesse à la rupture du quartz, d'abord dans le cas simple où l'on ne tient pas compte de l'amortissement ($f = 0$), puis en fonction de $f$.

a) *amortissement nul* :

L'amplitude à la distance $x$ devient :

$$\alpha(x) = \alpha \sin \frac{2\pi x}{\lambda}$$

$\alpha$ étant l'amplitude à l'extrémité du quartz

$$\alpha = \frac{X_m c}{E \omega} \frac{1}{\cos \frac{\omega e}{2c}}$$

La condensation de l'onde est alors :

$$\frac{\partial \alpha(x)}{\partial x} = \frac{2\pi \alpha}{\lambda} \cos \frac{2\pi x}{\lambda}$$

dont la valeur maximum est, pour $x = 0$, c'est-à-dire au centre du quartz

$$\left(\frac{\partial\,\alpha(x)}{\partial\,x}\right)_{x=0} = \frac{2\,\pi\,\alpha}{\lambda} = \frac{\pi\,\alpha}{e}$$

puisque $e = \frac{\lambda}{2}$.

Or la valeur de la condensation que peut supporter le quartz est liée à la résistance à la traction $R = 1000$ kg/cm$^2$ (5) et à $E = 7871$ kg/mm$^2$ par

$$\frac{\partial\,\alpha(x)}{\partial\,x} = \frac{R}{E}$$

L'amplitude de rupture est donc $A_r$, donnée par :

$$\frac{\pi\,A_r}{e} = \frac{R}{E}$$

c'est-à-dire : $A_r = 0{,}0004\,e$

Pour un quartz de fréquence $N^{c/s} = \frac{287.000}{e}$, la vitesse correspondante de rupture $V_r$ est alors :

$$V_r = 2\pi\,NA_r = 729 \text{ cm/s.}$$

La valeur obtenue pour $V_r$ est constante et, tout particulièrement, elle ne dépend pas de la fréquence choisie.

b) *amortissement non négligeable* :

Les calculs sont analogues à ceux du cas précédent.

L'amplitude du mouvement à une distance $x$ du centre du quartz, est égale au module de la fonction $A(x)$ définie par l'équation (2) :

$$\alpha(x) = \frac{X_m\,c}{E\omega}\left(\frac{\sin^2 p + \frac{f^2 x^2}{c^2}\cos^2 p}{\cos^2 + q\,\frac{f^2 e^2}{4\,c^2}\sin^2 q}\right)^{\frac{1}{2}}$$

ou, en désignant toujours par $\alpha$, l'amplitude à l'extrémité du quartz $\left(x = \frac{e}{2}\right)$ :

$$\alpha = \frac{X_m c}{E\omega} \frac{1}{\sqrt{\cos^2 q + \frac{f^2 e^2}{4 c^2} \sin^2 q}}$$

$$\alpha(x) = \alpha \sqrt{\sin^2 p + \frac{f^2 x^2}{c^2} \cos^2 p}$$

Au centre du quartz ($x = 0$), la condensation de l'onde est :

$$\left(\frac{\partial \alpha(x)}{\partial x}\right)_{x=0} = \alpha \sqrt{\frac{\pi^2}{e^2} + \frac{f^2}{c^2}}$$

et donc l'amplitude $A'_r$ à la rupture est donnée par :

$$A'_r \sqrt{\frac{\pi^2}{e^2} + \frac{f^2}{c^2}} = \frac{R}{E}$$

c'est-à-dire :

$$A'_r = \frac{A_r}{\sqrt{1 + \frac{f^2 e^2}{c^2 \pi^2}}}$$

Comme nous l'avons déjà indiqué, le coefficient $f$ dépend de très nombreux paramètres, d'où, suivant les conditions expérimentales, une amplitude $A'_r$ qui peut être très variable. Néanmoins, dans certaines de nos expériences, nous avons pu rendre ce coefficient très petit, $f/c$ devenant de l'ordre de 0,01, tandis que $\pi/e$ est égal à 2,25. Dans ces conditions, $A'_r$ est pratiquement égal à $A_r$. De toute façon, nous pouvons déduire de ces résultats que la vitesse à la rupture ne peut qu'atteindre, parfois de façon pratiquement égale, la vitesse $V_r = 729$ cm/s.

2°) *Relation entre l'intensité efficace H. F. et la vitesse v de vibration du quartz* : Il est impossible de suivre par la méthode interférométrique, que nous avons décrite dès le début de cette étude, l'augmentation de l'amplitude jusqu'à la rupture du quartz. Au delà de dix recouvrements, il nous est en effet pratiquement impossible d'en distinguer de nouveaux; or l'amplitude de rupture que nous venons de calculer, en nécessiterait plus de quarante.

Par contre, ce que nous pourrons mesurer aisément, c'est, soit la tension H. F. appliquée au quartz, soit le courant H. F. qui le traverse. Pour une vitesse maximum donnée de vibration du quartz, la tension

à appliquer dépendra de façon considérable de l'amortissement subi par le quartz, tandis que le courant en sera indépendant. Nous avons donc cherché une relation entre ce courant et la vitesse $v$ de vibration du quartz. On connaît ([6]) cette relation dans le cas des coupes X vibrant longitudinalement. Notre étude concerne ces mêmes coupes vibrant en épaisseur.

L'élongation aux extrémités du quartz peut s'obtenir en remplaçant dans les équations (1) et (2) $x$ par $\frac{e}{2}$ et en tenant compte du fait que :

$$c^2 = \frac{E}{\rho} \quad \text{et} \quad X_m = \frac{-\varepsilon V_m}{e'}$$

$V_m$ = valeur maximum de la tension H. F. appliquée

$e' = e + 4{,}41\, e''$ où $e''$ = épaisseur de la couche d'air située entre le quartz et les électrodes ($e'' < 0{,}1$ cm) :

Nous pouvons aussi, dans le calcul de cette élongation, faire intervenir le facteur $y$, écart entre la pulsation réelle de résonance du quartz et la pulsation fournie par l'oscillateur. Nous obtenons :

$$\alpha_{(t)} = \frac{2\varepsilon V_m}{\rho\, \omega\, e\, e'} \cdot \frac{1}{\sqrt{f^2 + y^2}} \sin(\omega t - \theta)$$

avec

$$\operatorname{tg} \theta = - \frac{\sin \frac{\omega e}{c}}{\frac{f e}{c}}$$

A ce même instant, la vitesse de vibration est :

$$v = \frac{2\varepsilon V_m}{\rho\, e\, e'} \cdot \frac{1}{\sqrt{f^2 + y^2}} \cos(\omega t - \theta) \qquad \text{(Eq. 3)}$$

Par ailleurs si $\vec{D}$ est l'induction électrique dans le quartz en vibration, la densité de courant est :

$$\vec{i} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

On peut en déduire le courant $i$ qui traverse le quartz de surface S :

$$i = \frac{4\, V_m \varepsilon^2 S}{\rho\, e\, e'\, 2} \cdot \frac{1}{\sqrt{f^2 + y^2}} \cos(\omega t - \theta) \qquad \text{(Eq. 4)}$$

en phase avec $v$.

La comparaison des équations (3) et (4) donne :

$$\frac{i}{v} = \frac{2\,\varepsilon\,S}{e'}$$

ou entre les valeurs maxima $I\sqrt{2}$ et $v_m$ de la vitesse :

$$\frac{I\sqrt{2}}{v_m} = \frac{2\,\varepsilon\,S}{e'}$$

La vitesse maximum du quartz oscillant est donc liée à l'intensité efficace I par la relation :

$$v_m = \frac{I\sqrt{2}\,e'}{2\,\varepsilon\,S} \qquad \text{(Eq. 5)}$$

et l'amplitude correspondante est :

$$\alpha = \frac{I\sqrt{2}\,e'}{2\,\omega\,\varepsilon\,S} \qquad \text{(Eq. 6)}$$

3°) *Vérifications expérimentales* : Nous avons vérifié la formule (6) grâce à la mesure des « recouvrements » de franges pour des amplitudes allant jusqu'à 1,5 μ. Les franges étaient obtenues avec la raie verte du mercure ($\lambda = 0{,}546$ μ) ; un recouvrement de franges correspondant à une amplitude de $\lambda/4$ devait correspondre à une intensité comprise entre 0,32 et 0,25 milliampère suivant que $e''$ était compris entre 0 et 0,1 cm. L'accord expérimental est excellent.

Par ailleurs, si dans la formule (5) nous remplaçons $v_m$ par la valeur de la vitesse à la rupture $V_r = 729$ cm/s calculée, nous avons l'intensité I à cet instant :

$$I = \frac{18\,S}{e'} \text{ milliampères}$$

Pour notre quartz cette intensité de rupture devait donc être comprise entre 12,7 et 10 mA suivant la valeur de $e''$. De fait, différentes expériences ont donné 11 mA comme valeur moyenne (7).

## III° Conclusion

Quelle que soit la fréquence du quartz, il semble donc qu'on ne puisse dépasser une vitesse limite d'environ 7 m/s. L'observation de

l'effet Doppler nécessiterait plusieurs réflexions sur la surface vibrante et, de ce point de vue, une surface d'au moins un centimètre carré serait nécessaire.

Le choix du quartz sera fixé par l'oscillation sinusoïdale, sans déformation de la surface vibrante, que l'on veut obtenir. Pour cela, une coupe X d'un quartz vibrant en épaisseur, en demi-onde, s'impose. Enfin pour un tel quartz de surface carrée de 1 cm de côté, la fréquence ne devra pas être supérieure à 200 khz.

L'on ne peut songer à utiliser un quartz analogue de fréquence 400 khz vibrant en quart d'onde, ce qui nécessiterait une puissance apparente H. F. réduite de moitié. Dans ce cas, c'est, en effet, l'onde Y de N = 270 khz qui impose au quartz son régime de vibration.

(1) Roig — *Journal de Physique et du Radium*. T. XI, p. 440, Juillet 1950.
(2) Tolansky et Bardley — *Proceedings of the Physical Society* B. Vol. LXIV, p. 224 et sq, 1951.
(3) Besème — Diplôme d'études supérieures, Lille, 1954.
(4) Cady — Piezoélectricity, p. 84 et sq, Mc.Graw Hill Book Company, New-York, 1946.
(5) Sosman — The properties of Silica, Chemical catalog. Company, Inc., p. 856, New-York, 1927.
(6) Cady — *op. cit.*, p. 320 et sq.
(7) Ségard et Besème — *C. R. Acad. Sc.* 239, 1954 p. 1021.

# Note concernant le spectre infra-rouge à grande dispersion de la molécule $CH_3 — CH_2D$

PAR

R. VAN RIET, C. COURTOY et M. DE HEMPTINNE

Sommaire. — Quelques bandes d'absorption du spectre infra-rouge de la molécule $CH_3 — CH_2D$ ont été enregistrées; les mesures obtenues sont comparées à celles de R. L. Posey et E. F. Barker; les formules de la toupie symétrique ont été appliquées à quelques bandes caractéristiques; les valeurs des constantes de rotation déduites de la structure de rotation sont comparées à celles que l'on obtient à partir des moments d'inertie; nous donnons enfin un tableau récapitulatif de tous les résultats acquis en diffusion Raman et en absorption infra-rouge.

## Introduction

Nous avons étudié récemment les spectres Raman à l'état liquide et à l'état gazeux d'une série de molécules de deutéroéthanes ainsi que leurs spectres infra-rouges pris à dispersion moyenne (1). Ces derniers ont fait apparaître qu'il était indispensable de connaître le spectre infra-rouge à grande dispersion de ces molécules afin de pouvoir aborder le problème de l'attribution des fréquences observées aux vibrations propres de ces molécules. L'étude consacrée par R. L. Posey et E. F. Barker à la molécule $CH_3 — CH_2D$ (2) en a fait connaître le spectre infra-rouge à grande dispersion. Dans l'article cité (2), les auteurs ont donné une reproduction des enregistrements qu'ils avaient obtenus. Lorsque nous avons comparé ces enregistrements du spectre de la molécule $CH_3 — CH_2D$ à ceux que nous avions obtenus nous-mêmes pour les spectres infra-rouges des molécules $CH_2D — CH_2D$ (3) et $CD_2H — CD_2H$ (4), nous avons constaté qu'il était souhaitable de pouvoir comparer une série de spectres obtenus avec le même spectrographe plutôt qu'avec deux spectrographes différents. C'est ainsi que nous avons pris occasion de travaux en cours à grande dispersion au moyen du spectrographe à réseau de l'Institut d'Astrophysique de l'Université de Liège et dont nous avions fait usage pour l'étude au réseau des molécules $CH_2D — CH_2D$ et

$CD_2H$ — $CD_2H$ pour enregistrer avec ce même spectrographe quelques bandes caractéristiques de la molécule $CH_3$ — $CH_2D$.

La technique expérimentale est identique à celle que COURTOY et de HEMPTINNE ont décrite (5), et les mesures que nous donnons ont été ramenées au vide.

Les bandes observées à grande dispersion sont reproduites sur les planches ci-après. Nous avons pu enregistrer le spectre de 700 à 905 $cm^{-1}$, de 1155 à 1355 $cm^{-1}$ et de 2850 à 3040 $cm^{-1}$.

Ainsi que nous l'avons dit, le spectre infra-rouge à grande dispersion avait été étudié et enregistré par POSEY et BARKER. Les mesures obtenues par ces auteurs sont comparées aux nôtres, par bandes, dans les tableaux suivants. Le spectrographe à réseau de l'Institut d'Astrophysique de l'Université de Liège n'étant pas encore mis sous vide, l'enregistrement de la bande très importante vers 1470 $cm^{-1}$ n'a pu être obtenu en raison de la présence de $H_2O$, tandis que la bande centrée à 2180 $cm^{-1}$ n'a pas été enregistrée à cause de raisons techniques.

*Fréquences des principales raies d'absorption de la bande à* 715 $cm^{-1}$

| Mesures de POSEY et BARKER (non corrigées au vide) | Nos mesures (corrigées au vide) |
|---|---|
| 682.84 | — |
| 686.39 | — |
| 689.78 | — |
| 693.22 | — |
| 696.63 | — |
| 700.03 | — |
| 703.62 | 703.51 |
| 707.27 | 707.01 |
| 711.20 | 711.07 |
| 713.77 | 713.71 |
| 715.18 | 715.00 |
| 717.80 | 717.52 |
| 719.97 | 719.88 |
| 724.20 | 724.07 |
| 727.30 | 727.33 |
| 730.65 | 730.58 |
| 734.18 | 733.96 |
| 737.35 | 737.26 |
| 740.85 | 740.71 |
| 744.12 | 743.96 |
| 747.47 | 747.30 |
| 750.78 | 750.69 |
| 754.03 | 753.78 |

*Fréquences des principales raies d'absorption de la bande à* 804, 47 $cm^{-1}$

| Mesures de POSEY et BARKER (non corrigées au vide) | Nos mesures (corrigées au vide) |
|---|---|
| 771.00 | 770.77 |
| 772.95 + | 772.59 + |
| 774.20 | 773.92 |
| 776.08 + | 775.81 + |
| 777.27 | 777.08 |
| 780.53 | 780.37 |
| 782.04 + | 781.81 + |
| 783.70 | 783.52 |
| 786.87 | 786.78 |
| 790.18 | 790.00 |
| 791.97 + | 791.83 + |
| 793.52 | 793.34 |
| 795.33 + | 795.18 + |
| 796.97 | 796.82 |
| 798.95 + | 798.73 + |
| 800.38 | 800.17 |
| 804.62 (centre) | 804.47 (centre) |
| 811.12 | 810.90 |
| 814.08 | 813.90 |
| 817.43 | 817.29 |
| 820.98 | 820.75 |
| 822.50 + | 822.33 + |
| 824.56 | 824.39 |
| 826.36 + | 826.12 + |
| 827.66 | 827.49 |
| 829.90 + | 829.83 + |
| 831.32 | 831.03 |
| 831.84 | 831.83 |
| 833.60 + | 833.25 + |
| 834.84 | 834.55 |
| 835.72 | 835.46 |
| 837.14 | 836.91 |
| 838.42 | 838.17 |
| 839.50 | 839.39 |
| 840.76 | 840.56 |
| 842.02 | 841.78 |
| 843.38 | 843.01 |
| 844.36 | 844.19 |
| 845.56 | 845.36 |
| 846.84 | 846.66 |
| 848.22 | 847.89 |
| 849.32 | 849.07 |
| 850.44 | 850.26 |
| 851.72 | 851.50 |
| 852.84 | 852.80 |
| 854.34 | 854.18 |

Le signe + indique une raie faible.

*Fréquences des principales raies d'absorption de la bande à 2980,38 $cm^{-1}$*

| Mesures de Posey et Barker (non corrigées au vide) | Nos mesures (corrigées au vide) |
|---|---|
| 2981.07 (centre) | 2980.38 (centre) |
| 2984.29 | 2984.27 |
| 2987.29 | 2987.13 |
| 2990.53 | 2990.62 |
| 2994.20 | 2993.65 |
| 2997.64 | 2997.12 |
| 3000.47 | 3000.44 |
| 3003.07 | 3003.26 |
| 3006.64 | 3006.44 |
| 3010.21 | 3009.96 |
| En outre : | |
| doublet parallèle à 2892.33 | doublet parallèle à 2892.01 |
| 2896.87 | 2896.57 |
| doublet parallèle à 2948.86 | doublet parallèle à 2948.27 |
| 2952.93 | 2953.05 |

La comparaison entre les mesures de Posey et Barker et les nôtres indique donc un très bon accord. Les différences — toujours petites — que l'on peut relever proviennent partiellement du fait que les fréquences proposées par les auteurs américains n'ont pas été ramenées au vide. L'importance de la correction $\nu_{air}$-$\nu_{vide}$ varie avec la fréquence : elle est de l'ordre de 0.80 $cm^{-1}$ dans la région 3.000 $cm^{-1}$, et de l'ordre de 0.23 $cm^{-1}$ dans la région 800 $cm^{-1}$.

La lecture des tableaux précédents montre que, compte tenu de la correction pour la région 800 $cm^{-1}$, nos mesures concordent en général à moins de 1/10 de $cm^{-1}$ avec celles de Posey et Barker. Dans la région 3000 $cm^{-1}$, la dispersion du réseau est beaucoup plus faible que dans la région 800 $cm^{-1}$, et seules les mesures des pics très effilés (centres de bande) donnent un accord satisfaisant entre les fréquences de Posey et Barker et les nôtres.

## La molécule $CH_3 — CH_2D$ considérée comme toupie symétrique

Trois bandes d'absorption de la molécule $CH_3 — CH_2D$ ont été étudiées au moyen des formules de la toupie symétrique.

A. — *Bande centrée à* 715,00 (*minimum d'absorption*)

Les fréquences de la structure de rotation de cette bande peuvent être retrouvées avec une bonne approximation par les formules :

$$P_Q(K) = 715{,}52 - (2K - 1) \times 1{,}670 \text{ cm}^{-1}.$$

$$R_Q(K) = 715{,}52 + (2K + 1) \times 1{,}670 \text{ cm}^{-1}.$$

Les valeurs théoriques résultant de l'application des formules précédentes sont mises en regard des fréquences mesurées expérimentalement et donnent lieu au tableau suivant :

| | $P_Q$ | | $R_Q$ | |
|---|---|---|---|---|
| K | Fréq. théor. | Fréq. exp. (vide) | Fréq. théor. | Fréq. expér. (vide) |
| 1 | 713.85 | 713.71 | 720.52 | 719.88 |
| 2 | 710.51 | 711.07 | 723.87 | 724.07 |
| 3 | 707.17 | 707.01 | 727.21 | 727.33 |
| 4 | 703.83 | 703.51 | 730.55 | 730.58 |
| 5 | | | 733.89 | 733.96 |
| 6 | | | 737.23 | 737.26 |
| 7 | | | 740.55 | 740.71 |
| 8 | | | 743.91 | 743.96 |
| 9 | | | 747.25 | 747.30 |
| 10 | | | 750.59 | 750.69 |
| 11 | | | 753.93 | 753.78 |

On obtient donc pour cette bande la même valeur, 1,670, pour le niveau supérieur et pour le niveau inférieur, et l'on a :

$$A' - \tfrac{1}{2}(B' + C') = A'' - \tfrac{1}{2}(B'' + C'') = 1{,}670 \text{ cm}^{-1}.$$

B. — *Bande centrée à* 804,47 $cm^{-1}$ (*maximum d'absorption*)

Les fréquences de la structure de rotation de cette bande sont obtenues avec une bonne approximation en utilisant les formules :

$$P_Q(K) = 805{,}29 - (2K - 1) \times 1{,}72 + 0{,}013\ K^2$$

$$R_Q(K) = 805{,}29 + (2K + 1) \times 1{,}72 + 0{,}013\ K^2$$

On obtient le tableau comparatif suivant :

| | $P_Q$ | | $R_Q$ | |
|---|---|---|---|---|
| K | Fréq. théor. | Fréq. expér. (vide) | Fréq. théor. | Fréq. expér. (vide) |
| 0 | | | 807.01 | 806.51 |
| 1 | 803.58 | — | 810.46 | 810.90 |
| 2 | 800.18 | 800.17 | 813.94 | 813.90 |
| 3 | 796.81 | 796.82 | 817.45 | 817.29 |
| 4 | 793.45 | 793.34 | 820.97 | 820.75 |
| 5 | 790.13 | 790.00 | 824.53 | 824.39 |
| 6 | 786.84 | 786.78 | 828.12 | 828.09 |
| 7 | 783.56 | 783.52 | 831.72 | 831.83 |
| 8 | 780.32 | 780.37 | 835.36 | 835.46 |
| 9 | 777.10 | 777.08 | 839.02 | 839.29 |
| 10 | 773.91 | 773.92 | 842.61 | 843.01 |
| 11 | 770.74 | 770.77 | | |

On trouve donc par les formules précédentes qui contiennent un terme en $K^2$ des valeurs différentes pour le niveau supérieur et pour le niveau inférieur :

$A' - \frac{1}{2}(B' + C') = 1{,}720$ et $A'' - \frac{1}{2}(B'' + C'') = 1{,}707\ cm^{-1}$.

C. — *Bande centrée à* 2980,38 — 2981,82 (*maxima d'absorption*)

Cette bande possède un double maximum central d'absorption et est considérée par Posey et Barker comme une bande de type A + B. Les fréquences de la structure de rotation peuvent s'obtenir par les formules :

$$P_Q(K) = 2981{,}79 - (2K - 1) \times 1{,}683 - 0{,}002\ K^2$$

$$R_Q(K) = 2981.79 + (2K + 1) \times 1{,}683 - 0{,}002\ K^2$$

On obtient le tableau suivant :

| | $P_Q$ | | $R_Q$ | |
|---|---|---|---|---|
| K | Fréq. théor. | Fréq. expér. (vide) | Fréq. théor. | Fréq. expér. (vide) |
| 1 | 2980.11 | 2980.38 | 2986.84 | 2987.13 |
| 2 | 2976.74 | 2976.71 | 2990.20 | 2990.62 |
| 3 | 2973.36 | 2973.68 | 2993.55 | 2993.65 |
| 4 | 2969.98 | 2969.64 | 2996.90 | 2997.12 |
| 5 | 2966.60 | 2966.68 | 3000.25 | 3000.44 |
| 6 | 2963.21 | 2963.32 | 3003.60 | 3003.26 |
| 7 | 2959.81 | 2960.20 | 3006.93 | 3006.44 |
| 8 | 2956.42 | 2956.92 | 3010.27 | 3009.96 |

Pour cette troisième bande de $CH_3 — CH_2D$, nous obtenons donc la valeur $A' — {}^1{}_2 (B' + C') = 1{,}683$ pour le niveau supérieur, et la valeur $A'' — \frac{1}{2} (B'' + C'') = 1{,}685$ pour le niveau inférieur.

*Moments d'inertie principaux de la molécule* $CH_3 — CH_2D$

Pour calculer les moments d'inertie de la molécule $CH_3 — CH_2D$, nous avons choisi les données géométriques de Hansen et Dennison [6].

Les constantes géométriques ont alors les valeurs suivantes :

$C — C = 1{,}543$ Å, $C — H = C — D = 1{,}102$ Å, $C\widehat{C}D = 109°37'$, $D\widehat{C}H = H\widehat{C}H = 109°19'$, $m_H = 1{,}008132$, $m_D = 2{,}014726$, $m_C = 12{,}00388$.

Nous avons rapporté la molécule à un système d'axes $x$, $y$, $z$, tel que le plan $xy$ coïncide avec le plan de symétrie de la molécule (plan H C C D). La détermination des axes de l'ellipsoïde d'inertie conduit à une rotation de $-3°26'22''$ des axes $x$ et $y$ autour de l'axe des $z$ pour obtenir les axes principaux d'inertie, $x'\ y'\ z' = z$.

Les valeurs des moments principaux d'inertie par rapport au système d'axes précédents sont :

$I_{x'} = I_A = 12{,}445228 \times 10^{-40}$ gr./cm², d'où $A = 2{,}248774$ cm$^{-1}$

$I_{y'} = I_B = 44{,}432353 \times 10^{-40}$ gr./cm², d'où $B = 0{,}629268$ cm$^{-1}$

$I_{z'} = I_C = 46{,}060052 \times 10^{-40}$ gr./cm², d'où $C = 0{,}607609$ cm$^{-1}$

En utilisant ces valeurs, calculées à partir des moments d'inertie, pour A, B, C, on obtient $A - \frac{1}{2}(B + C) = 1{,}630035$. L'analyse des trois bandes que nous avons donnée fournit pour l'état fondamental les valeurs

$$A'' - \frac{1}{2}(B'' + C'') = 1{,}67 \quad 1{,}707 \text{ et } 1{,}685.$$

Nous nous limiterons à acter cette différence entre les valeurs calculées pour les constantes A. B, C et les valeurs de ces constantes obtenues par l'analyse de bandes d'absorption. Nous reprendrons la question après avoir fait l'étude des bandes d'absorption appartenant aux autres deutéro-éthanes.

Afin d'avoir sous les yeux tous les résultats de mesures des différents spectres de la molécule $CH_3 - CH_2D$, nous les avons réunis dans le tableau récapitulatif suivant :

TABLEAU RÉCAPITULATIF DES FRÉQUENCES DE $CH_3 - CH_2D$

| INFRA-ROUGE | | | RAMAN | |
|---|---|---|---|---|
| Réseau | | Perk. Elmer | Ram. gaz | Ram. liquide |
| POSEY et BARKER | Nous | Nous | Nous | Nous |
| 2981.07 | 2980.38 | 2982 | — | 2977 |
| 2952.93 | 2953.05 | 2952 | 2954 | 2938 |
| 2948.86 | 2948.27 | — | 2950 | 2938 |
| 2896.87 | 2896.57 | 2896 | 2897 | 2884 |
| 2892.33 | 2892.01 | — | — | — |
| 2753.53 | — | 2753 | — | 2740 |
| 2595.63 | — | 2595 | — | — |
| 2281.11 | — | 2280 | — | — |
| 2180.55 | — | 2180 | 2182 | 2174 |
| 1468.55 | — | 1470 | — | 1460 |
| 1388.42 | — | 1388 | — | 1384 |
| 1311.73 | — | 1312 | — | 1305 |
| 1309.76 | — | — | — | — |
| 1159.00 | — | 1161 | — | 1157 |
| 1121.95 | — | 1124 | — | 1117 |
| — | — | 981 | 978 | 978 |
| 804.62 | 804.67 | 805 | — | 805 |
| 715.18 | 715.00 | 716 | — | 717 |

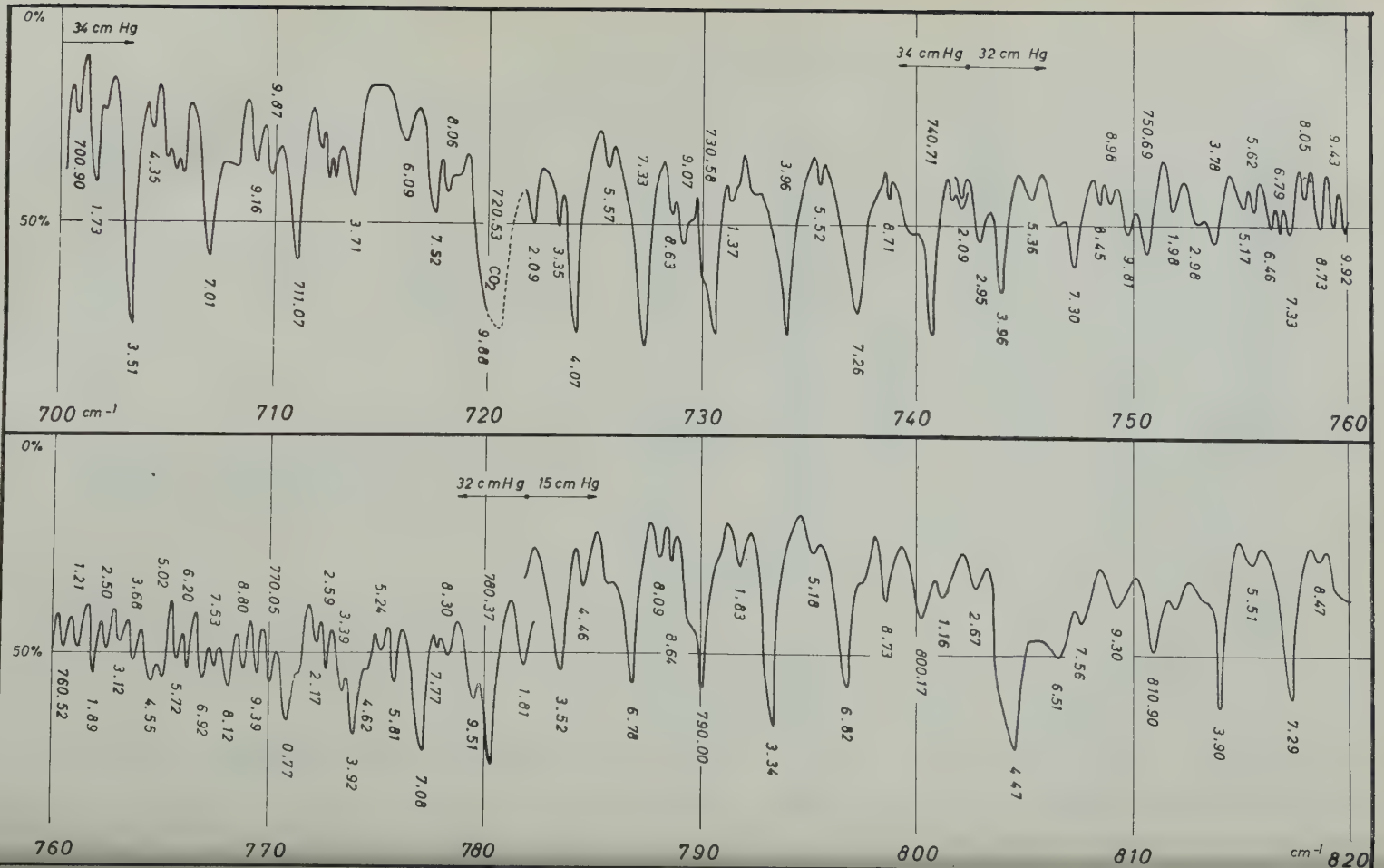
En terminant ce travail, nous remercions tout spécialement le Professeur M. Migeotte pour l'usage du spectrographe à réseau et pour l'hospitalité accordée à l'un d'entre nous au Laboratoire de l'Institut d'Astrophysique de l'Université de Liège.

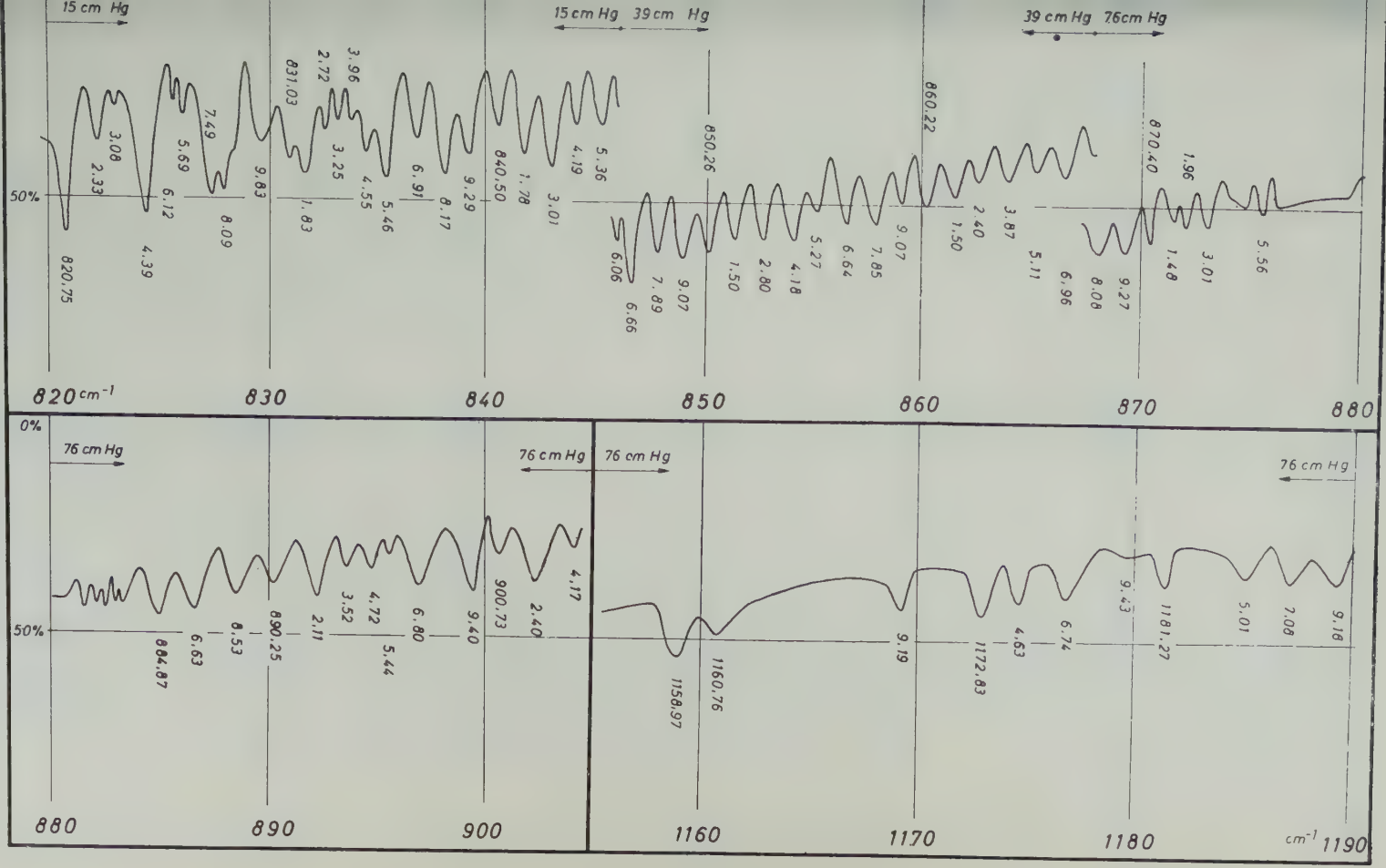
Nous remercions également le Centre de Chimie physique moléculaire et le F.N.R.S. pour l'aide financière qu'ils nous ont apportée. Nous disons enfin notre gratitude à J. Remy qui nous a aidés au cours de ce travail.

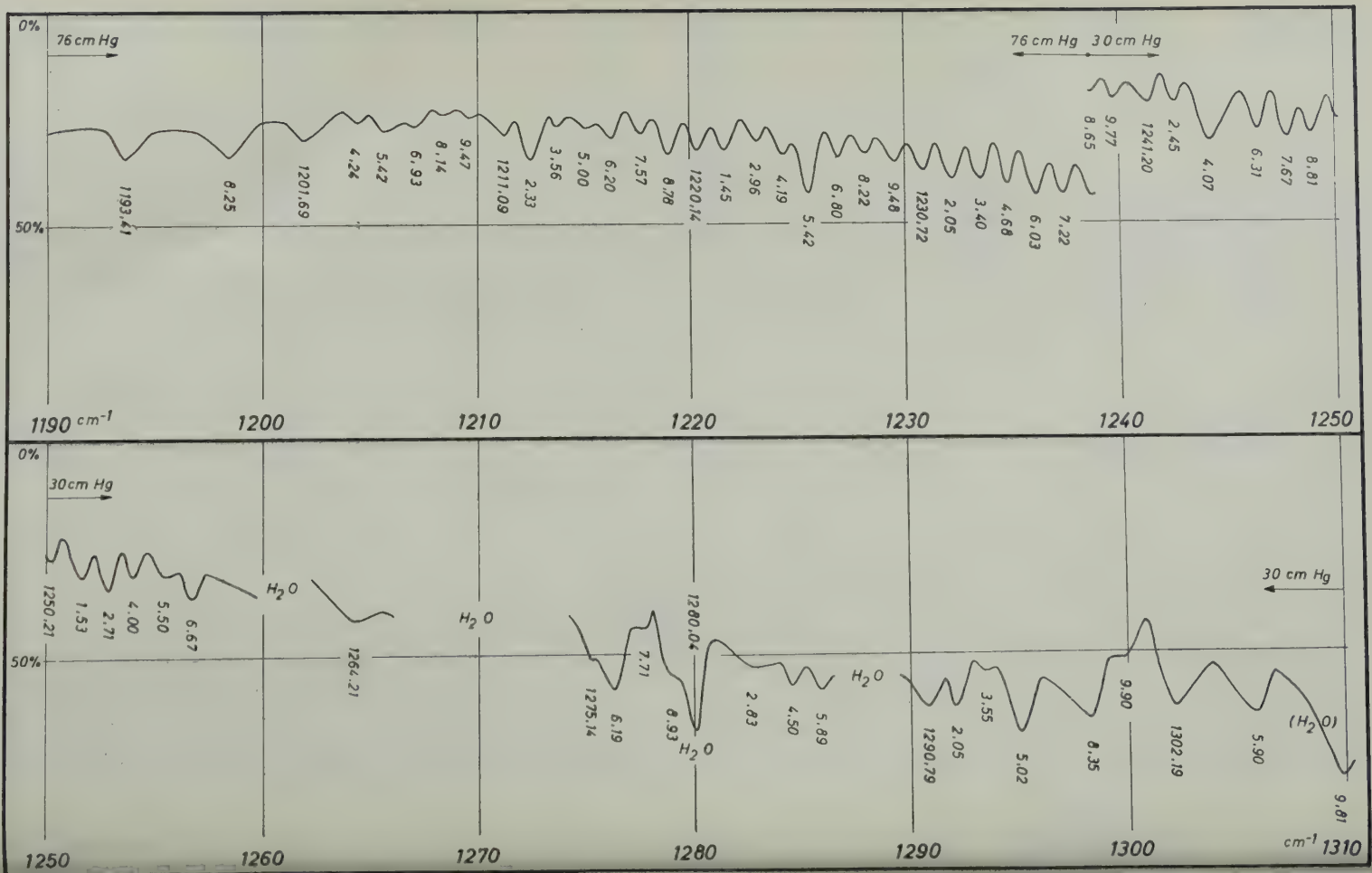
Université de Louvain,
*Laboratoire de Physique nucléaire et moléculaire.*

## LITTERATURE

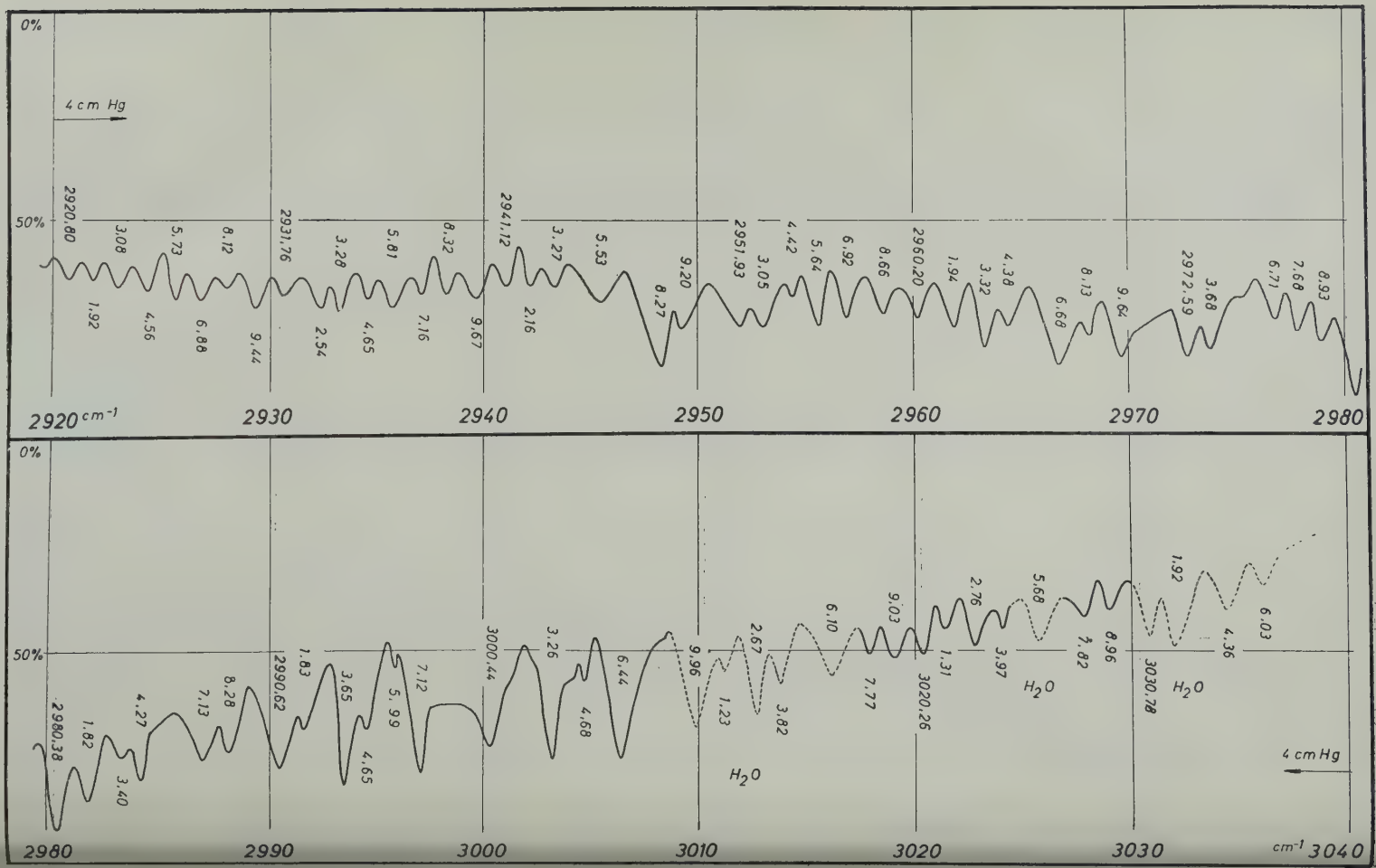
(1) R. Van Riet et M. de Hemptinne, *Bull. Acad. Royale Belg.* (1953).
(2) L. R. Posey et E. F. Barker, *J. Chem. phys.*, 17, 182 (1949).
(3) R. Van Riet, C. Courtoy et M. de Hemptinne, *Ann. Soc. Scient. Brux.* LXVII, p. 105, (1953).
(4) R. Van Riet, C. Courtoy et M. de Hemptinne, *Ann. Soc. Scient. Brux.* LXVII, p. 206 (1953).
(5) C. Courtoy et M. de Hemptinne, *Ann. Soc. Scient. Brux.*, p. 82 (1952).
(6) G. E. Hansen et E. M. Dennison, *J. Chem. Phys.* 20, 313 (1952).


0%
34 cm Hg
34 cm Hg 32 cm Hg
50%
700.90
1.73
3.51
4.35
7.01
9.16
9.87
711.07
3.71
6.09
8.06
7.52
720.53
CO2
9.88
2.09
3.35
4.07
5.57
7.33
8.63
9.07
730.58
1.37
3.96
5.52
7.26
740.71
8.71
2.09
2.95
3.96
5.36
7.30
8.45
8.98
9.81
750.69
1.98
2.98
3.78
5.17
5.62
6.46
6.79
7.33
8.05
8.73
9.43
9.92
700 cm-1
710
720
730
740
750
760
0%
32 cm Hg 15 cm Hg
50%
760.52
1.21
1.89
2.50
3.12
3.68
4.55
5.02
5.72
6.20
6.92
7.53
8.12
8.80
9.39
770.05
0.77
2.17
2.59
3.39
3.92
4.62
5.24
5.81
7.08
8.30
7.77
9.51
780.37
1.81
3.52
4.46
6.78
8.09
8.64
790.00
1.83
3.34
5.18
6.82
8.73
800.17
1.16
2.67
4.47
6.51
7.56
9.30
810.90
3.90
5.51
7.29
8.47
760
770
780
790
800
810
cm-1
820


15 cm Hg
15 cm Hg 39 cm Hg
39 cm Hg 76cm Hg
50%
820.75
3.08
2.33
6.12
4.39
5.69
7.49
8.09
9.83
831.03
2.72
3.25
3.96
4.55
5.46
1.83
6.91
8.17
9.29
840.50
1.78
3.01
4.19
5.36
6.06
6.66
7.89
9.07
850.26
1.50
2.80
4.18
5.27
6.64
7.85
9.07
860.22
1.50
2.40
3.87
5.11
6.96
8.08
9.27
870.40
1.48
1.96
3.01
5.56
820 cm-1
830
840
850
860
870
880
0%
76 cm Hg
76 cm Hg
76 cm Hg
76 cm Hg
50%
884.87
6.63
8.53
890.25
2.11
3.52
4.72
5.44
6.80
9.40
900.73
2.40
4.17
1158.97
1160.76
9.19
1172.83
4.63
6.74
9.43
1181.27
5.01
7.08
9.18
880
890
900
1160
1170
1180
cm-1 1190


0%
76 cm Hg
50%
1193.41
8.25
1201.69
4.24
5.42
6.93
8.14
9.47
1211.09
2.33
3.56
5.00
6.20
7.57
8.78
1220.14
1.45
2.96
4.19
5.42
6.80
8.22
9.48
1230.72
2.05
3.40
4.68
6.03
7.22
76 cm Hg
30 cm Hg
8.65
9.77
1241.20
2.45
4.07
6.31
7.67
8.81
1190 cm-1
1200
1210
1220
1230
1240
1250
0%
30cm Hg
50%
1250.21
1.53
2.71
4.00
5.50
6.67
H2O
1264.21
H2O
1275.14
6.19
7.71
8.93
1280.04
H2O
2.83
4.50
5.89
H2O
1290.79
2.05
3.55
5.02
8.35
9.90
1302.19
5.90
(H2O)
9.81
30 cm Hg
1250
1260
1270
1280
1290
1300
cm-1
1310

9.32
2858.55
4 cm Hg
30 cm Hg
$H_2O$
3.22
1351.97
$H_2O$
7.94
7.03
4.34
1342.45
$H_2O$
5.15
3.16
1331.31
9.72
7.74
6.04
4.19
1322.47
$H_2O$
30 cm Hg
50%
1309.81
1310 cm⁻¹
1320
1330
1340
1350
1360
2850
2860
4 cm Hg
9.65
7.42
6.95
6.05
4.93
3.80
2.28
2910.94
9.55
~2908
6.95
5.52
4.44
3.38
2900.90
9.38
6.57
5.43
4.41
3.61
3.03
2.01
2891.10
7.83
6.88
5.66
3.53
2.56
1.43
2880.19
8.97
7.86
6.94
5.52
3.05
2871.13
9.73
7.93
6.56
4.50
6.72
2861.36
0%
50%
4 cm Hg
cm⁻¹ 2920
2910
2900
2890
2880
2870
2860


0%
4 cm Hg
50%
2920.80
3.08
5.73
8.12
1.92
4.56
6.88
9.44
2931.76
3.28
5.81
8.32
2.54
4.65
7.15
9.67
2941.12
3.27
5.53
2.16
8.27
9.20
2951.93
3.05
4.42
5.64
6.92
8.66
2960.20
1.94
3.32
4.38
6.68
8.13
9.64
2972.59
3.68
6.71
7.68
8.93
2920 cm-1
2930
2940
2950
2960
2970
2980
0%
50%
2980.38
1.82
3.40
4.27
7.13
8.28
2990.62
1.83
3.65
4.65
5.99
7.12
3000.44
3.26
4.68
6.44
9.96
1.23
2.67
3.82
H2O
6.10
7.77
9.03
1.31
3020.26
2.76
3.97
5.68
H2O
7.82
8.96
3030.78
1.92
4.36
6.03
H2O
4 cm Hg
2980
2990
3000
3010
3020
3030
cm-1 3040

# TABLE DES MATIÈRES

DU TOME 68me

Manuscrits reçus le 31 janvier 1954 PAGES

PREMIÈRE SECTION : **Sciences mathématiques et astronomiques**

Sur des systèmes d'équations intégro-différentielles récurrentes de forme normale dont les termes intégraux contiennent les dérivées des fonctions inconnues, par M. R.H. Germay ..... 5

Quelques images symboliques, par M. L. Poli ..... 13

DEUXIÈME SECTION : **Sciences physiques et chimiques**

Algèbre symétrique et seconde quantification d'un système de bosons, par M. A. Deprit ..... 23

Session du 6 mai 1954, à Bruxelles

PREMIÈRE SECTION : **Sciences mathématiques et astronomiques**

Sur une équation intégrale généralisant l'équation de première espèce de Volterra. Extension d'un théorème de Le Roux, par M. R.H. Germay 34

Sur des généralisations de la fonction de Mittag-Leffler, par MM. P. Delerue et J.M. Blondel ..... 42

DEUXIÈME SECTION : **Sciences physiques et chimiques**

Etude expérimentale et théorique de la figure de diffraction donnée par une ouverture circulaire couverte à moitié par une lame à faces parallèles, par M. N. Ségard ..... 53

Théorie limite du flambage d'une plaque circulaire chauffée en son centre, par M. F. Buckens ..... 61

Radiochimie des isomères nucléaires du brome Br 80 dans le bromoforme à l'état liquide et dans le tétrabromure de carbone à l'état solide, par MM. P.C. Capron et Y. Oshima ..... 72

Les vibrations CH, CD et C—C de la molécule d'éthane deutéro-substituée $CH_2D — CH_2D$, par MM. R. Van Riet et M. de Hemptinne .... 92

Contribution expérimentale à l'étude de la molécule $CD_3 — CD_2H$, par MM. R. Van Riet, C. Courtoy et M. de Hemptinne..... 108

Problèmes de Cauchy en théorie quantique des champs, par M.A. Deprit. 119

Session du 18 novembre, à Louvain

PREMIÈRE SECTION : **Sciences mathématiques et astronomiques**

Les algèbres de Lie de caractéristique quelconque, par R. LAVENDHOMME 133

Factorisation des polynomes cyclotomiques modulo un nombre premier, par Robert BALLIEU ..... 140

A generalisation of Bessel-Maitland function by A. M. CHAK ..... 145

Théorie limite du flambage d'une plaque circulaire chauffée en son centre. Déformées caractéristiques, par F. BUCKENS ..... 157

DEUXIÈME SECTION : **Sciences physiques et chimiques**

Au sujet de certaines images consécutives, par A. Biot ..... 164

Tables pour le calcul des doublets minces collés, corrigés de l'aberration sphérique, par A. BIOT ..... 167
Etude théorique et expérimentale de la figure de diffraction de l'héliomètre, par N. SÉGARD et A. VANDENBOSSCHE ..... 175
Quartz piézoélectrique à utiliser pour l'obtention de l'effet Doppler, par N. SÉGARD et E. BESÈME ..... 185
Note concernant le spectre infra-rouge à grande dispersion de la molécule $CH_3 — CH_2D$, par R. VAN RIET, C. COURTOY et M. DE HEMPTINNE 193
Table des Matières du Volume 68e ..... 207

AUTEURS

R. Ballieu, 140 — E. Besème, 185 — A. Biot, 164, 167 — J. M. Blondel, 42 — F. Buckens, 61, 157 — P. C. Capron, 72 — A. M. Chak, 145 — C. Courtoy, 108, 193 — A. Deprit, 23, 119 — R. H. Germay, 5, 34 — M. de Hemptinne, 92, 108, 193 — R. Lavendhomme, 133 — Ch. Manneback, 164 — Y. Oshima, 72 — L. Poli, 72 — N. Ségard, 53, 175, 185 — A. Vandenbossche, 175 — R. Van Riet, 92, 108, 193.

DATES DE PUBLICATION

1er et 2e fasc. pp. 1 à 132, 30 juin 1954.
3e fasc. pp. 133 à 208, 31 décembre 1954.

(21325) Imprimerie Ceuterick, s. c., 66 rue Vital Decoster, Louvain.
Resp. L. Pitsi, 25 rue Dagobert, Louvain (Belgique).

# Revue des Questions Scientifiques

Cette revue, fondée en 1877 par la Société scientifique de Bruxelles, se compose actuellement de cinq séries : la **première série** comprend 30 volumes (1877-1891); la **deuxième**, 20 volumes (1892-1901); la **troisième**, 30 volumes (1902-1921); la **quatrième**, 30 vol. (1922-1936). La livraison de janvier 1937 inaugura la **cinquième série**.

La revue fut interrompue par la guerre, après le deuxième fascicule, avril 1940, du tome 117 de la collection. Ce tome fut achevé par les fascicules de février et juillet 1946.

Depuis 1947, paraît chaque année un volume, en quatre fascicules d'environ 160 pages chacun, 20 janvier, 20 avril, 20 juillet, 20 octobre.

Depuis 1947 la Revue est aussi l'organe de l'UNION CATHOLIQUE DES SCIENTIFIQUES FRANÇAIS.

*Administration et Rédaction* : **11, rue des Récollets, Louvain** (Belgique)

PRIX D'ABONNEMENT

| | |
|---|---|
| Belgique, Congo belge et Grand-Duché de Luxembourg | **200 francs belges** |
| abonnement de soutien ..... | **500 francs belges** |
| abonnement d'honneur ..... | **1000 francs belges** |
| France et Union française (s'adresser à la librairie Masson, 120 boulevard St Germain, Paris 6e) .... | **1400 francs franç.** |
| Autres pays (s'adresser au Secrétariat, à Louvain) .... | **280 francs belges** |

# PUBLICATIONS DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

EXTRAIT DU CATALOGUE

## ANNALES DE LA SOCIETE SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES,

t. I à XLVI, 1875 à 1926. Chaque vol. in-8° de 400 à 600 pages fr. 150,00

## ANNALES DE LA SOCIETE SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES,

Série A (sc. mathématiques), t. XLVII à t. LVI (1927 à 1936) fr. 70,00
Série B (sc. physiques et naturelles) » fr. 70,00
Série C (sc. médicales) (1927 et 1928) fr. 100,00 — (1929 à 1933) fr. 40,00
(1931 à 1936) fr. 20,00
Série D (sc. économ. et techniques) (1927 à 1929) fr. 20,00 — (1930) fr. 60,00
(1931 à 1936) fr. 100,00
Série I (sc. mathématiques et physiques), tt. LVII à LXVII (1937 à 1953) fr. 70.00
t. LXVIII (1954) fr. 100,00
Série II (sc. naturelles et médicales), tt. LVII à LX (1937 à 1940, 46) fr. 70,00
Série III (sc. économiques), tt. LVII à LX (1937 à 1940, 46) . . fr. 100,00

## REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES,

t. I à XCII (1877 à 1927). Les deux volumes annuels . . . . fr. 200,00
Le fascicule trimestriel . . . . . fr. 60,00
t. XCIII à CXVI (1928 à 1939). Les deux volumes annuels. . fr. 200,00
Le fascicule . . . . . fr. 40,00
t. CXVII (1940 et 1946), tt. CXVIII à CXXV (1947 à 1954) Le volume fr. 200,00
Le fascicule . . . . . fr. 60,00

## TABLES ANALYTIQUES DES ANNALES,

t. I à XXV (1875 à 1901) . . . . . fr. 20,00
t. XXVI à XLVI (1902 à 1926) . . . . . fr. 40,00

## TABLES ANALYTIQUES DE LA REVUE.

t. I à L (1877 à 1901) . . . . . fr. 20,00
t. LI à LXXX (1902 à 1921) . . . . . fr. 20,00
t. LXXXI à CX (1922 à 1936) . . . . . fr. 30,00

## MONOGRAPHIES DE SCIENCES NATURELLES

I. — B. Tougarinoff. Les réactions organiques dans l'analyse qualitative minérale (cations). — Un vol. in-8° de 107 pages (1930) : en Belgique, fr. 24,00; autres pays, 30,00 fr.

II. — V. Schaffers. Le paratonnerre et ses progrès récents Un vol. in-8° de 90 pages (1931) : en Belgique, fr. 24,00; autres pays fr. 30.00.

IV. — F. Kaisin et E. de Pierpont. — Hydrogéologie des Calcaires de la Belgique. Un vol. in 8°- de 111 pages, avec 35 fig. et un plan hors texte (1939) : en Belgique, fr. 24,00; autres pays, fr. 30,00. (épuisé)

## MONOGRAPHIES MEDICALES

I. — M. Schillings. Le rein en fer à cheval. Un vol. in-8° de 104 pages, avec 8 planches hors-texte (1928) : en Belgique, fr. 70,00; autres pays, fr. 90.00.

III. — P. Van Gehuchten. La pathologie du système pallido-strié. Un vol. in-8° de 52 pages, avec 8 planches hors-texte (1930) : en Belgique, fr. 24,00; autres pays, fr. 30,00.

## MONOGRAPHIES DES SCIENCES ECONOMIQUES

I. — A. Henry. La structure technique de l'agriculture belge et ses particularités en Wallonie et en Flandre. Un vol. de 66 pages . . . . . fr. 20,00

II. — A. Henry. Les variations régionales de l'Agriculture en Belgique. Un vol. de 50 pages . . . . . fr. 10,00

III. — A. Delpérée. La réglementation conventionnelle des conditions de travail en Belgique. Un vol. de 200 pages . . . . . fr. 60,00